

Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

Pontos Axiumbólicos de Superfícies Imersas em \mathbb{R}^4

por

Janderson Ribeiro da Silva

Mestrado Acadêmico em Matemática

Orientadora: **Prof. Dra Débora Lopes da Silva**

**São Cristóvão
Fevereiro 2016**

Janderson Ribeiro da Silva

Pontos Axiumbólicos de Superfícies Imersas em \mathbb{R}^4

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre na Área de Matemática.

Orientador: **Prof. Dra Débora Lopes da Silva**

**São Cristóvão
Fevereiro 2016**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Silva, Janderson Ribeiro da
S586p Pontos axiombólicos de superficies imersas em R^4 / Janderson
Ribeiro da Silva ; orientador Débora Lopes da Silva. - São Cristóvão,
2016.
93 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de
Sergipe, 2016.

1. Superfícies (Matemática). 2. Curvatura. 3. Elipse (Geometria). I.
Silva, Débora Lopes, orient. II. Título.

CDU 514.752.6



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Pontos Axiomáticos de Superfícies Imersas no \mathbb{R}^4 .
por

Janderson Ribeiro da Silva

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr.ª Debora Lopes da Silva - UFS
Orientadora

Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola - UFMA
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Fevereiro de 2016

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Resumo

As noções de pontos umbílicos e linhas de curvatura principal são tradicionalmente estudadas em superfícies do \mathbb{R}^3 . Nosso objetivo é estender essas noções para superfícies imersas em \mathbb{R}^4 . Para isto, analisaremos a imagem da segunda forma fundamental, restrita ao círculo unitário, no plano normal da superfície. Mostraremos que tal imagem é uma elipse, chamada elipse de curvatura. Os pontos onde a elipse de curvatura se torna um círculo são chamados pontos axiumbílicos e as linhas correspondentes ao eixo maior e menor da elipse são chamadas, respectivamente, de linhas axiais principais e médias. Neste trabalho descreveremos a estrutura das linhas axiais principais de imersões de superfícies em \mathbb{R}^4 na vizinhança de pontos axiumbílicos genéricos.

Palavras-chave: Elipse de curvatura, pontos axiumbílicos, linhas de curvatura axiais.

Abstract

The notion of umbilic points and principal curvature lines are traditionally studied in surfaces of \mathbb{R}^3 . Our goal is to extend these notions to surfaces immersed in \mathbb{R}^4 . For this, we will analyze the image of the second fundamental form, restricted to the unit circle in the normal plane of the surface. We show that this image is an ellipse, called ellipse of curvature. The points where the ellipse of curvature becomes a circle are called axiumbilics points and lines corresponding to large and small axes of the ellipse are called, respectively, of principal and mean axial lines. In this work we describe the structure of the principal axial lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^4 in the neighborhood of generic axiumbilics points.

Keywords: Ellipse of curvature, axiumbilics points, axial curvature lines.

Agradecimentos

À Deus, Ser Supremo e Eterno, pelo cuidado para comigo, por sua graça e sabedoria que, sempre guiou meus passos nessa grande conquista.

Aos meus pais Benedito e Ilma, pelo cuidado e carinho, pela formação como pessoa. Às minhas irmãs Suelen e Camila, pelo carinho e extrema paciência que tiveram comigo. Aos meus amados sobrinhos, Sophia, Miguel e Isaac, pelo grande carinho. Aos meus familiares pelo incentivo e pela torcida, em especial: Vilma, João, Joelson, Priscila, Bruna e Sara.

A minha orientadora, professora Dra. Débora, pelos conselhos, pela disponibilidade em meio as dificuldades e claro pela paciência.

A banca examinadora composta pelos professores Dr. Flausino Spindola e Dr. Humberto Viglioni.

Aos meus colegas de Mestrado, em especial Dayane, Francielle e Diego, pelos momentos de dificuldade e alegrias compartilhados. E como não poderia esquecer, aos colegas mestres Samuel, Silvânia, Thamires, Olívio, Alex e Jussara pelo incentivo que me deram durante essa jornada.

Ao professor e amigo Dr. Gastão, pelo incentivo, pelas boas conversas sobre matemática e pelos conselhos.

Aos meus amigos que compartilharam das minhas agonias, que tiveram que ouvir tantas vezes eu falar de superfícies e edo, que sempre estiveram por perto para dar conselhos, e broncas quando preciso. Em especial, Davi Mendes, Jamisson, Luciana, Edna, Joara, Jairo, Adalberto, Allen, Andrea, Gilmar, Jáfer, Ângela, Márcio, Mirandi e Guimarães.

Aos meus amigos, que me acompanham há bastante tempo: Dayse, Aurea, Sandra, Disson, Júnior, Ademir e Marcos.

Sumário

1	Linhas de curvaturas axiais em superfícies imersas de \mathbb{R}^4	11
1.1	Equação diferencial para linhas de curvaturas axiais	11
1.2	Elipse de Curvatura	12
1.3	Linhas de Curvaturas Axiais	20
1.4	Equações diferenciais das linhas axiais em uma Carta de Monge	27
2	Configurações Axiais de superfícies imersas em \mathbb{R}^4	36
2.1	Configurações Axiais na vizinhança de pontos axiumbólicos	40
2.2	O ponto axiumbólico E_3	44
2.3	O ponto axiumbólico E_4	45
2.4	O ponto axiumbólico E_5	51
2.5	O ponto axiumbólico E_{34}^1	56
2.6	O ponto axiumbólico $E_{4,5}^1$	67
3	Transversalidade e Estratificação	76
3.1	Espaço de Variedades Estratificadas	76
3.2	Teorema de Genericidade	76
4	Apêndice	79
4.1	Imersões, submersões e Posto	79
4.2	Superfície m -dimensional	81
4.3	Mudança de coordenadas	81
4.4	Espaço Tangente	82
4.5	Variedades Diferenciáveis	82
4.6	Orientação de Superfícies	84
4.7	Espaço de k -jatos de ordem n	85
4.8	Variedade de Jatos	86
4.9	Topologia de Whitney	87
4.10	Funções de Morse	87
4.11	Aplicações de Whitney do plano no plano	88
4.12	Transversalidade	90

Introdução

A proposta deste trabalho é estudar os pontos axiumbólicos de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 e suas bifurcações genéricas, baseado no artigo [4] escrito por Garcia, Sotomayor e Spindola.

A teoria de curvatura de superfície imersas em \mathbb{R}^3 é uma das mais importantes da Geometria Diferencial Clássica, um dos mais importantes conceitos dessa teoria é o de curvatura principal e suas funções simétricas elementares: As curvaturas média e gaussiana. Intimamente ligado as curvaturas principais estão os campos de direções principais, as suas folheações integrais e as singularidades umbílicas. Foi Euler o fundador da teoria de curvatura de superfícies, ao introduzir o cálculo infinitesimal em geometria.

Foi Monge quem observou a importância da configuração principal de uma superfície ao estudar o elipsóide de três eixos diferentes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a > b > c > 0.$$

Integrando as equações diferenciais das linhas de curvatura principais, ele encontrou uma família de curvas integrais no campo de direções principais, tendo observado assim o primeiro exemplo de folheações com singularidades em uma superfície, dita configuração principal de uma superfície orientada. Seu aluno Dupin, estendeu essa análise a outras superfícies, criando juntamente com as observações de seu mestre a teoria global das configurações principais integráveis, que para superfícies quadráticas nos dão também aquelas que são estruturalmente estáveis por uma pequena perturbação nos coeficientes de suas equações.

Posteriormente Darboux, publicou trabalhos que descrevem as possíveis configurações locais de uma superfície nas proximidades dos pontos umbílicos genéricos, caracterizando estes através de condições algébricas do 3-jato, tais pontos são chamados Darbouxianos em sua homenagem.

O matemático universalista francês H.Poincaré e o russo Lyapunov deram forma e sistemaziram a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Posteriormente essa teoria foi aprimorada com os trabalhos de Andronov, Pontriagin e Peixoto, porém o trabalho deles não se alastrou para teoria clássica da Geometria.

Foi com o trabalho dos matemáticos Sotomayor e Gutierrez que o estudo das configurações principais tomaram um novo fôlego, encaixando-se na Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais e dos Sistemas Dinâmicos, sendo introduzidos novos conceitos como Estabilidade Estrutural e Genericidade, esse novo estudo recebeu o nome de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais da Geometria.

Para a teoria das superfícies imersas de \mathbb{R}^4 , podemos citar como referencial os trabalhos de Little, Wong e Forsyth. No trabalho de Little aparecem alguns exemplos de campos de direções, com construção baseada na elipse de curvatura e suas singularidades. A elipse de curvatura é a imagem de k_n (curvatura normal de uma superfície imersa de \mathbb{R}^4) restrita ao círculo unitário $S_p^1 \subset T_p M$ em $N_p M$.

A teoria das singularidades de aplicações diferenciáveis analisa principalmente as propriedades das aplicações diferenciáveis que sejam invariantes por difeomorfismos no domínio e contra-domínio, (ou seja mudança de coordenadas). A origem do estudo de singularidades é encontrada na obra do matemático M.Morse, que versa sobre a estrutura local das funções reais diferenciáveis na vizinhança de pontos críticos não degenerados. Estes trabalhos tiveram influência

importante na determinação de estruturas topológicas em Variedades Diferenciáveis e no Cálculo de Variações Global. Posterior ao trabalho de M.Morse, tivemos os trabalhos realizados pelos matemáticos H.Whitney, R.Thom e J.Mather. Numa direção conseguiram estender os resultados obtidos por M.Morse para o caso de aplicações diferenciáveis com contra-domínio arbitrário. Em outra direção obtiveram resultados análogos no estudo de famílias de funções reais dependendo diferenciavelmente de vários parâmetros reais. O primeiro caso culmina na estabilidade estrutural das aplicações diferenciáveis e no outro caso ao Teorema Fundamental das Catástrofes.

Foram Garcia e Sotomayor que estudaram de forma mais abrangente os campos de direções e suas singularidades, foram eles que adotaram os nomes *linhas de curvatura axiais* para as curvas integrais no campo de direções e *pontos axiumbólicos* para as singularidades em analogia aos pontos umbílicos em \mathbb{R}^3 . Tais pontos axiumbólicos são determinados quando a elipse curvatura se torna um círculo.

A Teoria das Bifurcações estuda de forma qualitativa o comportamento de famílias de soluções, exemplo disso são as curvas integrais de um campo vetorial e as soluções de equações diferenciais. A teoria das bifurcações é intimamente ligada aos Sistemas Dinâmicos. Faremos uso dessa teoria para o estudo das linhas de curvatura axiais e seus pontos axiumbólicos E_3 , E_4 e E_5 , bem como a transição entre E_{34}^1 e E_{45}^1 que são pontos axiumbólicos de codimensão 1, ou seja, descritos por uma variação a um parâmetro.

O presente trabalho divide-se em:

Capítulo 1: Neste capítulo descrevemos conceitos geométricos de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , tais como 1ª e 2ª forma fundamentais, curvaturas normal e média. De posse da curvatura normal, definimos a elipse curvatura que será empregada para encontrar as equações das linhas de curvatura axiais e definir pontos axiumbólicos. Apresentaremos a Carta de Monge que será de grande utilidade para trabalhar com as equações das linhas de curvatura axiais.

Capítulo 2: Trataremos neste capítulo o conceito de Campo de Lie-Cartan e encontraremos as condições necessárias para classificar os pontos axiumbólicos. Faremos uso da teoria das bifurcações para determinar as configurações principais de uma superfície de \mathbb{R}^4 por meio das linhas de curvatura axiais próximas ao axiumbólicos E_3 , E_4 e E_5 . Definiremos os pontos de codimensão 1 : da transição de E_3 para E_4 temos o ponto E_{34}^1 e da colisão dos pontos E_4 e E_5 temos o ponto E_{45}^1 .

Capítulo 3: Definimos transversalidade e estratificação axiumbólica. Descrevemos os jatos axiumbólicos e não-axiumbólicos, não-transversais e duplo-transversais.

Capítulo 4: Trata-se de um apêndice com os principais resultados usados no trabalho. Começando com teoria de imersões e submersões, teoria das superfícies generalizando esta para Variedades Diferenciáveis. Além disso, vemos a teoria de singularidades, variedades de jatos, topologia de Whitney e transversalidade. Fechando o capítulo com o Teorema da Transversalidade de Thom.

Capítulo 1

Linhas de curvaturas axiais em superfícies imersas de \mathbb{R}^4

1.1 Equação diferencial para linhas de curvaturas axiais

Seja $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, C^r , com $r \geq 4$ uma imersão de uma superfície compacta-orientada suave M em \mathbb{R}^4 . Sejam $\{\alpha_x, \alpha_y\}$ uma base para o espaço tangente $T_p M$ e $\{N_1, N_2\}$ uma base ortonormal do complemento ortogonal de $T_p M$ para α . Tome a carta positiva (x, y) tal que

$$\{\alpha_x, \alpha_y, N_1, N_2\}$$

é uma base positiva (com Jacobiano positivo).

Definição 1. a) *1ª Forma Fundamental*

Definimos a primeira forma fundamental de α por:

$$I_\alpha = \langle D\alpha, D\alpha \rangle.$$

Observação 1. Sendo $D\alpha(x, y) = \alpha_x dx + \alpha_y dy$, teremos que

$$I_\alpha = \langle \alpha_x dx + \alpha_y dy, \alpha_x dx + \alpha_y dy \rangle$$

$$I_\alpha = \langle \alpha_x, \alpha_x \rangle dx^2 + 2\langle \alpha_x, \alpha_y \rangle dx dy + \langle \alpha_y, \alpha_y \rangle dy^2$$

onde $E = \langle \alpha_x, \alpha_x \rangle$, $F = \langle \alpha_x, \alpha_y \rangle$ e $G = \langle \alpha_y, \alpha_y \rangle$.

b) *2ª Forma Fundamental*

Definimos a segunda forma fundamental de α por:

$$II_\alpha = \sum_{i=1}^2 II_{i,\alpha} N_i, \text{ com } i = 1, 2$$

onde $II_{i,\alpha} = \langle N_i, D^2\alpha \rangle$, $i = 1, 2$

Observação 2.

$$II_\alpha = II_{1,\alpha} N_1 + II_{2,\alpha} N_2 = (II_{1,\alpha}, II_{2,\alpha}).$$

Vemos que

$$\begin{aligned} D^2\alpha &= D(D\alpha) = D(\alpha_x dx + \alpha_y dy) = (\alpha_x dx + \alpha_y dy)_x dx + (\alpha_x dx + \alpha_y dy)_y dy \\ &= (\alpha_{xx} dx + \alpha_{xy} dy) dx + (\alpha_{xy} dx + \alpha_{yy} dy) dy = \alpha_{xx} dx^2 + 2\alpha_{xy} dx dy + \alpha_{yy} dy^2, \end{aligned}$$

logo, para $i = 1, 2$,

$$\langle N_i, D^2\alpha \rangle = \langle N_i, \alpha_{xx} dx^2 + 2\alpha_{xy} dx dy + \alpha_{yy} dy^2 \rangle$$

$$= \langle N_i, \alpha_{xx} \rangle dx^2 + \langle N_i, \alpha_{xy} \rangle dx dy + \langle N_i, \alpha_{yy} \rangle dy^2.$$

Assim,

$$II_{i,\alpha} = \langle N_i, D^2\alpha \rangle = \langle N_i, \alpha_{xx} \rangle dx^2 + \langle N_i, \alpha_{xy} \rangle dx dy + \langle N_i, \alpha_{yy} \rangle dy^2.$$

Fazendo

$$e_i = \langle N_i, \alpha_{xx} \rangle, f_i = \langle N_i, \alpha_{xy} \rangle \quad e \quad g_i = \langle N_i, \alpha_{yy} \rangle.$$

Teremos

$$II_{i,\alpha} = e_i dx^2 + 2f_i dx dy + g_i dy^2.$$

Definição 2. O vetor curvatura normal em um ponto \mathbf{p} na direção v dado por

$$k_n(\mathbf{p}, v) = \frac{(II_{1,\alpha}(v), II_{2,\alpha}(v))}{I_\alpha(v)}$$

Definição 3. O vetor curvatura média \mathcal{H} é definido por

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^2 h_i N_i, \quad i = 1, 2,$$

onde

$$h_i = \frac{Eg_i + e_i G - 2f_i F}{2(EG - F^2)},$$

ou, em componentes,

$$\mathcal{H} = (h_1, h_2).$$

1.2 Elipse de Curvatura

Para cada vetor unitário $w \in T_{\mathbf{p}}M$, seja

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, satisfazendo

$$\gamma(0) = \mathbf{p} \quad e \quad \gamma'(0) = w$$

O vetor curvatura normal $k_n(\mathbf{p}, w)$ é a projeção, no plano normal $N_{\mathbf{p}}M$, do vetor aceleração $\gamma''(0)$. De fato,

$$proj_{N_1} \gamma''(0) = \frac{\langle \gamma''(0), N_1 \rangle}{\langle N_1, N_1 \rangle} N_1 \quad e \quad proj_{N_2} \gamma''(0) = \frac{\langle \gamma''(0), N_2 \rangle}{\langle N_2, N_2 \rangle} N_2.$$

Assim

$$k_n(\mathbf{p}, w) = (II_{1,\alpha}, II_{2,\alpha}) = (\langle \gamma''(0), N_1 \rangle, \langle \gamma''(0), N_2 \rangle).$$

Observação 3. Essa interpretação independe da escolha da curva γ com $\gamma'(0) = w$.

Considere um sistema de coordenadas isotérmicas em \mathbf{p} , isto é,

$$E = G = 1 \quad e \quad F = 0$$

podemos escrever $w = \alpha_u \cos t + \alpha_v \sin t$, dessa forma teremos

$$k_n(\mathbf{p}, w) = (e_1 \cos^2 t + 2f_1 \sin t \cos t + g_1 \sin^2 t, e_2 \cos^2 t + 2f_2 \sin t \cos t + g_2 \sin^2 t)$$

e

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = \left(\frac{e_1 + g_1}{2}, \frac{e_2 + g_2}{2} \right)$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \quad e \quad 2 \sin t \cdot \cos t = \sin 2t$$

teremos

$$k_n(\mathbf{p}, w) - \mathcal{H}(\mathbf{p}) = \left(\frac{e_1 - g_1}{2} \cos 2t + f_1 \sin 2t, \frac{e_2 - g_2}{2} \cos 2t + f_2 \sin 2t \right) = \begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

Proposição 1. A imagem da aplicação k_n restrita ao círculo unitário $S_p^1 \subset T_p M$ descreve em $N_p M$ uma elipse centrada em $\mathcal{H}(\mathbf{p})$, que é dita elipse de curvatura de α em \mathbf{p} , e é denotada por $\varepsilon_\alpha(\mathbf{p})$.

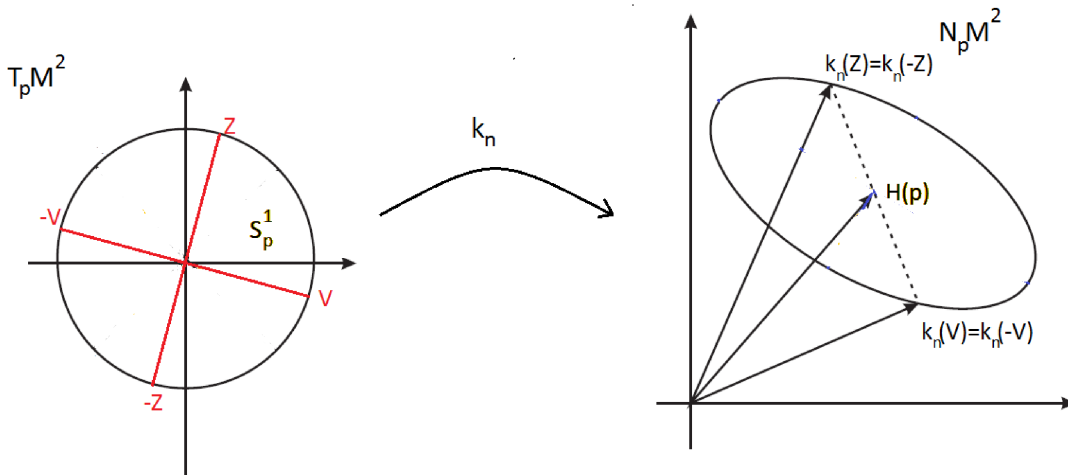


Figura 1.1: Elipse de Curvatura $\varepsilon_\alpha(\mathbf{p})$

Demonstração. Usando um sistema de coordenadas isotérmicas, vemos que

$$k_n(\mathbf{p}, w) - \mathcal{H}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}.$$

Assim, $(x, y) \in (k_n - \mathcal{H})(t)$ em $N_{\mathbf{p}}M$.

$$\begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Observamos que

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{bmatrix} f_2 & -f_1 \\ -\frac{e_2 - g_2}{2} & \frac{e_1 - g_1}{2} \end{bmatrix},$$

onde

$$\det \mathcal{A} = \frac{1}{2}[f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)] = \frac{1}{2}\mathcal{C},$$

com $\mathcal{C} = [f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)]$.

$$\begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donde,

$$\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} = \frac{2}{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} f_2 & -f_1 \\ -\frac{e_2 - g_2}{2} & \frac{e_1 - g_1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{2}{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} f_2 \cdot x - f_1 \cdot y \\ -\frac{e_2 - g_2}{2} \cdot x + \frac{e_1 - g_1}{2} \cdot y \end{bmatrix}$$

logo,

$$\cos^2 2t + \sin^2 2t = \frac{4}{\mathcal{C}^2} \left[(f_2 \cdot x - f_1 \cdot y)^2 + \left(-\frac{e_2 - g_2}{2} \cdot x + \frac{e_1 - g_1}{2} \cdot y \right)^2 \right]$$

$$1 = \frac{4}{\mathcal{C}^2} \left[f_2^2 \cdot x^2 - 2f_1 \cdot f_2 \cdot xy + f_1^2 \cdot y^2 + \frac{(e_2 - g_2)^2}{4} \cdot x^2 - \frac{2}{4}(e_1 - g_1)(e_2 - g_2)xy + \frac{(e_1 - g_1)^2}{4} \cdot y^2 \right]$$

$$1 = \frac{4}{\mathcal{C}^2} \left[\left(f_2^2 + \frac{(e_2 - g_2)^2}{4} \right) \cdot x^2 - 2 \left(f_1 \cdot f_2 + \frac{2}{4}(e_1 - g_1)(e_2 - g_2) \right) xy + \left(f_1^2 + \frac{(e_1 - g_1)^2}{4} \right) y^2 \right]$$

onde,

$$A = \frac{4}{\mathcal{C}^2} \left(f_2^2 + \frac{(e_2 - g_2)^2}{4} \right) \quad B = \frac{4}{\mathcal{C}^2} \left[-2 \left(f_1 \cdot f_2 + \frac{2}{4}(e_1 - g_1)(e_2 - g_2) \right) \right] \quad e \quad C = \frac{4}{\mathcal{C}^2} \left(f_1^2 + \frac{(e_1 - g_1)^2}{4} \right).$$

Assim, escrevemos

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1 \tag{1.2.1}$$

Condições para que a equação 1.2.1 seja uma elipse:

- i) $A > 0$;
- ii) $AC - B^2 > 0$.

Para os dois casos, seja

$$\frac{4}{C^2} > 0,$$

desde que $C \neq 0$.

Portanto

- a) $A > 0$

Pois

$$f_2^2 + \frac{(e_2 - g_2)^2}{4} > 0$$

- b) $C > 0$

Segue como no ítem a).

- c) $AC - B^2 > 0$

$$\begin{aligned} & \left[f_2^2 + \frac{(e_2 - g_2)^2}{4} \right] \cdot \left[f_1^2 + \frac{(e_1 - g_1)^2}{4} \right] - \left[f_1 \cdot f_2 + \frac{2}{4}(e_1 - g_1)(e_2 - g_2) \right]^2 \\ &= f_1^2 \cdot f_2^2 + \frac{1}{4} f_2^2 (e_1 - g_1)^2 + \frac{1}{4} f_1^2 (e_2 - g_2)^2 + \frac{1}{16} (e_1 - g_1)^2 (e_2 - g_2)^2 - f_1^2 \cdot f_2^2 \\ & \quad + \frac{2}{4} (e_1 - g_1)(e_2 - g_2) f_1 \cdot f_2 - \frac{1}{16} (e_1 - g_1)^2 (e_2 - g_2)^2 \\ &= \frac{1}{4} [f_2^2 (e_1 - g_1)^2 - 2(e_1 - g_1)(e_2 - g_2) f_1 \cdot f_2 + f_1^2 (e_2 - g_2)^2] = \frac{1}{4} [f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)]^2 > 0 \end{aligned}$$

□

Para cada $\mathbf{p} \in M$ em que $\|k_n - \mathcal{H}\|^2$ não é um círculo, os pontos máximos e mínimos desta aplicação determinam os vértices da elipse, localizados no eixo maior e menor.

Proposição 2. *Seja k_n restrita ao círculo unitário $S_{\mathbf{p}}^1$ uma aplicação quadrática. Temos que a um ponto A da elipse de curvatura está associada uma direção formada pelas antípodas A' e A'' em $S_{\mathbf{p}}^1$.*

Demonstração. Seja

$$k_n(\mathbf{p}, v) - \mathcal{H}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{e_1 - g_1}{2} & f_1 \\ \frac{e_2 - g_2}{2} & f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} = T(t)$$

onde t é o ângulo no sentido anti-horário entre du e dv .

Considere as identidades trigonométricas

$$\cos(\beta + \eta) = \cos \beta \cdot \cos \eta - \sin \beta \cdot \sin \eta$$

$$\sin(\beta + \eta) = \sin \beta \cdot \cos \eta + \sin \eta \cdot \cos \beta$$

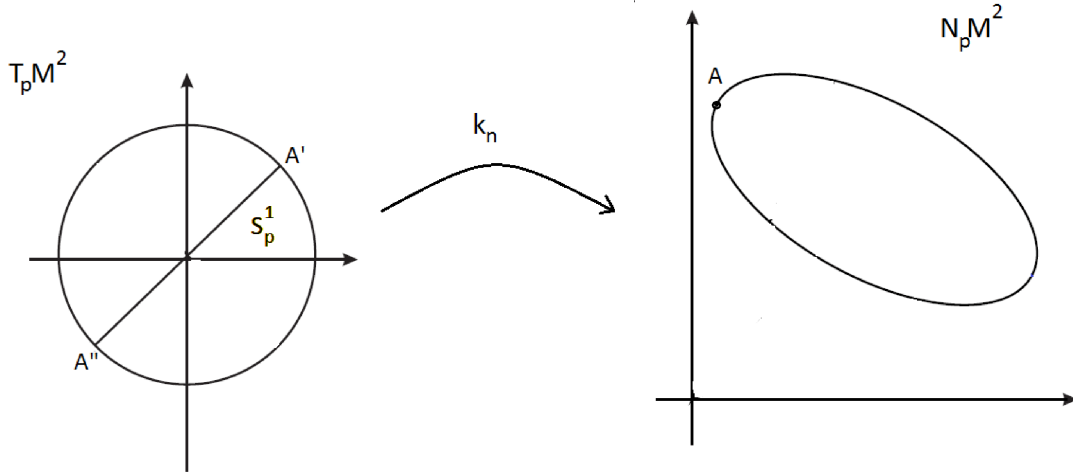


Figura 1.2: $k_n(A') = k_n(A'') = A$

temos

$$T(t) = T(t + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De fato, basta observar que

$$\cos(2t + 2k\pi) = \cos 2t \cdot \cos 2k\pi - \sin 2t \cdot \sin 2k\pi = \cos 2t$$

$$\sin(2t + 2k\pi) = \sin 2t \cdot \cos 2k\pi + \sin 2k\pi \cdot \cos 2t = \sin 2t.$$

Dessa forma cada ponto em $\varepsilon_\alpha(\mathfrak{p})$ é associada a uma direção em $T_{\mathfrak{p}}M$.

□

Proposição 3. Para cada $\mathfrak{p} \in M$, onde a elipse é não-degenerada, duas cruzeiras são definidas em $T_{\mathfrak{p}}M$: $A'A''B'B''$ associada ao eixo maior AB e $C'C''D'D''$ associada ao eixo menor CD da elipse de curvatura.

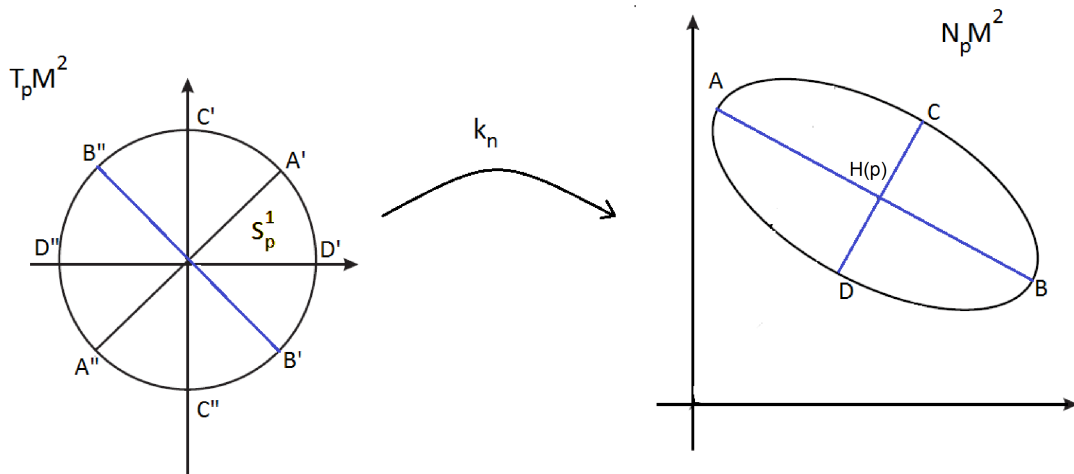


Figura 1.3: Cruzeiras $A'A''B'B''$ e $C'C''D'D''$

Demonstração. Use a proposição 2 e o seguinte resultado

$$T\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -T(t).$$

De fato

$$\cos(2t + \pi) = \cos 2t \cdot \cos \pi - \sin 2t \cdot \sin \pi = -\cos 2t$$

$$\sin(2t + \pi) = \sin 2t \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \cos 2t = -\sin 2t.$$

Portanto dois pontos de $\varepsilon_\alpha(\mathbf{p})$ simétricos em relação à \mathcal{H} são associadas a duas direções ortogonais em $T_{\mathbf{p}}M$. □

Proposição 4. Para cada $\mathbf{p} \in M$, onde a elipse é não-degenerada, as duas cruzeiras que são definidas em $T_{\mathbf{p}}M$, $A'A''B'B''$ e $C'C''D'D''$ formam um ângulo $\varrho = \frac{\pi}{4}$ entre seus eixos.

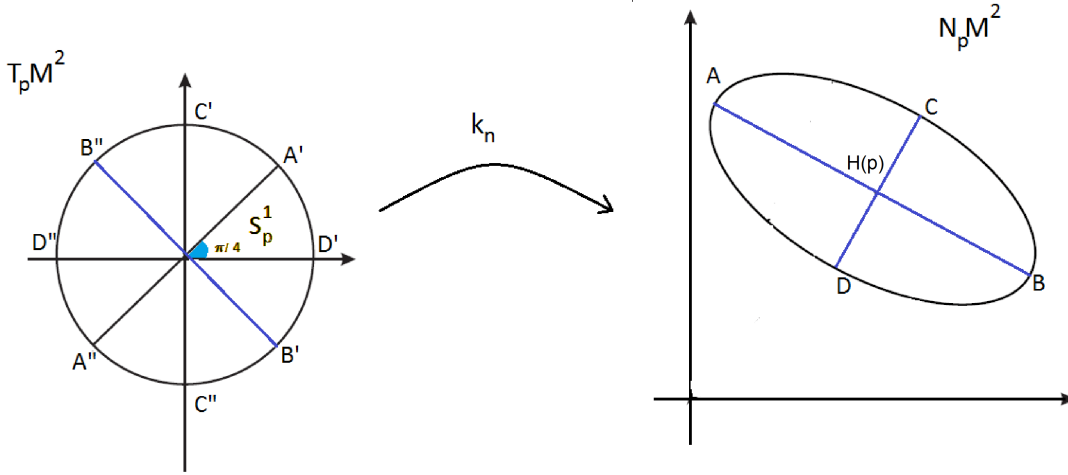


Figura 1.4: Cruzeiras $A'A''B'B''$ e $C'C''D'D''$

Demonstração. Fazendo

$$T\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

e analisando:

$$\cos(2t + \pi/2) = \cos 2t \cdot \cos \pi/2 - \sin 2t \cdot \sin \pi/2 = -\sin 2t$$

$$\sin(2t + \pi/2) = \sin 2t \cdot \cos \pi/2 + \sin \pi/2 \cdot \cos 2t = \cos 2t.$$

Temos,

$$T(t) \cdot T\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = (\cos 2t, \sin 2t) \cdot (-\sin 2t, \cos 2t) = -\cos 2t \cdot \sin 2t + \sin 2t \cdot \cos 2t = 0$$

□

Teorema 1 (Teorema de Green). *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q tem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então*

$$\int_C Pdx + Qdy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

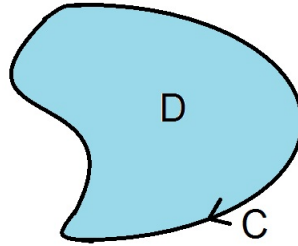


Figura 1.5: Teorema de Green

Lema 1 (Área). *A área de uma região D é dada por*

$$A(D) = - \oint_C ydx$$

Demonstração. Como a área da região D é dada por

$$A(D) = \int \int_D 1dA$$

Temos de escolher P e Q de modo que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$$

, existem várias possibilidades para tal escolha, dentre elas tomaremos

$$P(x, y) = -y \quad e \quad Q(x, y) = 0$$

, então pelo Teorema de Green, temos a seguinte fórmula para cálculo de área:

$$A(D) = - \oint_C y dx$$

□

Corolário 1 (Área). *Seja a área de uma região D delimitada por uma curva C de equações paramétricas*

$$x = \varphi(t) \quad e \quad y = \psi(t)$$

Então a área é definida como

$$A(D) = - \oint_C \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Demonstração. Fazendo a transformação de variáveis, temos

$$x = \varphi(t) \quad e \quad dx = \varphi'(t) dt.$$

Como $y = \psi(t)$, pelo lema 1, temos

$$A(D) = - \oint_C y dx = - \oint_C \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

□

Proposição 5 (Área da Elipse). *A área da elipse de curvatura $\varepsilon_\alpha(\mathbf{p})$ é dada por*

$$A(\varepsilon_\alpha(\mathbf{p})) = \frac{\pi}{2} [f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)].$$

Demonstração. Seja

$$\varepsilon_\alpha(\mathbf{p}) : \left(\frac{e_1 - g_1}{2} \cos 2t + f_1 \sin 2t + \frac{e_1 + g_1}{2}, \frac{e_2 - g_2}{2} \cos 2t + f_2 \sin 2t + \frac{e_2 + g_2}{2} \right)$$

Como k_n restrita a $S_{\mathbf{p}}^1$ é uma aplicação quadrática, esta recobre duplamente a elipse de curvatura. Desta forma, limitaremos a elipse entre 0 e π . A área da elipse será dada por

$$\begin{aligned} A(\varepsilon_\alpha(p)) &= - \int_0^\pi \left(\frac{e_2 - g_2}{2} \cos 2t + f_2 \sin 2t + \frac{e_2 + g_2}{2} \right) \cdot (-(e_1 - g_1) \sin 2t + 2f_1 \cos 2t) dt \\ &= - \int_0^\pi \left(- \frac{(e_2 - g_2)(e_1 - g_1)}{2} \cos 2t \sin 2t + f_1(e_2 - g_2) \cos^2 2t - f_2(e_1 - g_1) \sin^2 2t \right) \\ &\quad + \left(2f_1 \cdot f_2 \cos 2t \sin 2t - \frac{(e_2 + g_2)(e_1 - g_1)}{2} \sin 2t + f_1(e_2 + g_2) \cos 2t \right) dt \\ &= \left(\frac{(e_2 - g_2)(e_1 - g_1)}{2} - 2f_1 \cdot f_2 \right) \int_0^\pi \cos 2t \sin 2t dt - f_1(e_2 - g_2) \int_0^\pi \cos^2 2t dt + f_2(e_1 - g_1) \int_0^\pi \sin^2 2t dt \\ &\quad + \frac{(e_2 + g_2)(e_1 - g_1)}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt + f_1(e_2 + g_2) \int_0^\pi \cos 2t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(e_2 - g_2)(e_1 - g_1)}{2} - 2f_1 \cdot f_2 \right) \int_0^\pi \frac{\sin 4t}{2} dt - f_1(e_2 - g_2) \int_0^\pi \frac{1 + \cos 4t}{2} dt + f_2(e_1 - g_1) \int_\pi^0 \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\
&\quad + \frac{(e_2 + g_2)(e_1 - g_1)}{2} \int_0^\pi \sin 2t dt - f_1(e_2 + g_2) \int_0^\pi \cos 2t dt \\
&= \left(\frac{(e_2 - g_2)(e_1 - g_1)}{2} - 2f_1 \cdot f_2 \right) \left(-\frac{\cos 4\pi}{8} + \frac{\cos 0}{8} \right) - f_1(e_2 - g_2) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 4\pi}{8} \right) - \left(0 + \frac{\sin 0}{8} \right) \right] \\
&\quad + f_2(e_1 - g_1) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{8} \right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{8} \right) \right] \\
&\quad + \frac{(e_2 + g_2)(e_1 - g_1)}{2} \left[\left(-\frac{\cos 4\pi}{2} \right) - \left(-\frac{\cos 0}{2} \right) \right] - f_1(e_2 + g_2) \left[\left(\frac{\sin 4\pi}{2} \right) - \left(\frac{\sin 0}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} [f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)]
\end{aligned}$$

□

Observação 4. *Seja*

$$[f_2(e_1 - g_1) - f_1(e_2 - g_2)] \neq 0$$

então teremos uma elipse não-degenerada, podendo ser um círculo.

Caso contrário, será um segmento ou um ponto.

1.3 Linhas de Curvaturas Axiais

Definição 4. *Considere a função $\|k_n - \mathcal{H}\|^2$, para cada $\mathbf{p} \in M$ em que a elipse $\varepsilon(\alpha)$ é não-degenerada, os pontos de máximo e mínimo da função determinam quatro pontos na elipse de curvatura. Estes pontos são determinados pelo cruzamento da elipse com seus eixos maior e menor.*

a) *Campo de Direções de Curvatura Axiais*

Para cada $\mathbf{p} \in M$ em que a elipse é não-degenerada, ficam definidas duas cruzeiras em $T_{\mathbf{p}}M$ uma relacionada ao eixo maior e a outra ao eixo menor da elipse de curvatura. Dessa forma temos um Campo de 2-cruzeiras em M que é chamado Campo de Direções de Curvatura Axial.

b) *Pontos Axiumbílicos*

*Os pontos $\mathbf{p} \in M$ onde a elipse torna-se um círculo são chamados **pontos axiumbílicos**. O conjunto dos pontos axiumbílicos é denotado por \mathcal{U}_α .*

As direções tangentes para as quais o vetor curvatura normal são os eixos ou vértices da elipse de curvatura $\varepsilon_\alpha(\mathbf{p})$ são caracterizados pela forma quártica a seguir:

$$Jac(\|k_n - \mathcal{H}\|^2, I_\alpha) = 0.$$

De fato, temos

$$(k_n - \mathcal{H})|_{S_{\mathbf{p}}^1}.$$

E como $E = G = 1$ e $F = 0$, teremos

$$I_\alpha = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = dx^2 + dy^2 = 1.$$

Usando Multiplicadores de Lagrange, temos

$$\frac{\partial(k_n - \mathcal{H})}{\partial(dx)} = \lambda \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dx)} \quad e \quad \frac{\partial(k_n - \mathcal{H})}{\partial(dy)} = \lambda \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dy)}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$, assim teremos

$$\begin{aligned} Jac(\|k_n - \mathcal{H}\|^2, I_\alpha) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial(k_n - \mathcal{H})}{\partial(dx)} & \frac{\partial(k_n - \mathcal{H})}{\partial(dy)} \\ \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dx)} & \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dy)} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dx)} & \lambda \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dy)} \\ \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dx)} & \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dy)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Como as linhas da matriz Jacobiana são linearmente dependentes, segue que

$$Jac(\|k_n - \mathcal{H}\|^2, I_\alpha) = 0$$

e que $\mathbf{p} \in M$ é um ponto crítico.

Proposição 6 (Linhas de Curvatura Axiais). *Seja a equação*

$$Jac(\|k_n - \mathcal{H}\|^2, I_\alpha) = 0$$

então teremos a equação das linhas de curvatura axiais

$$a_4 dy^4 + a_3 dy^3 dx + a_2 dy^2 dx^2 + a_1 dy dx^3 + a_0 dx^4 = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} a_4 &= -4F(EG - F^2)(g_1^2 + g_2^2) + 4G(EG - 4F^2)(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\ &\quad + 8FG^2(f_1^2 + f_2^2) + 4FG^2(e_1 g_1 + e_2 g_2) - 4G^3(e_1 f_1 + e_2 f_2), \\ a_3 &= -4E(EG - 4F^2)(g_1^2 + g_2^2) - 4G^3(e_1^2 + e_2^2) - 32EFG(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\ &\quad + 16EG^2(f_1^2 + f_2^2) + 8EG^2(e_1 g_1 + e_2 g_2), \\ a_2 &= -12FG^2(e_1^2 + e_2^2) + 12E^2F(g_1^2 + g_2^2) + 24EG^2(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\ &\quad - 24E^2G(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\ a_1 &= 4E^3(g_1^2 + g_2^2) + 4G(EG - 4F^2)(e_1^2 + e_2^2) + 32EFG(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\ &\quad - 16E^2G(f_1^2 + f_2^2) - 8E^2G(e_1 g_1 + e_2 g_2), \\ a_0 &= 4F(EG - 2F^2)(e_1^2 + e_2^2) - 4E(EG - 4F^2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) - 8E^2F(f_1^2 + f_2^2) \\ &\quad - 4E^2F(e_1 g_1 + e_2 g_2) + 4E^3(f_1 g_1 + f_2 g_2). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Lema 2. *As relações seguintes são satisfeitas:*

a)

$$Ea_2 = -6Ga_0 + 3Fa_1$$

b)

$$E^2a_3 = (4F^2 - EG)a_1 - 8FGa_0 \tag{1.3.2}$$

c)

$$E^3 a_4 = G(EG - 4F^2)a_0 + F(2F^2 - EG)a_1.$$

Demonstração. Devemos verificar as igualdades são válidas, dessa forma temos

a) Seja $Ea_2 = -6Ga_0 + 3Fa_1$, verificando o lado esquerdo da igualdade, temos

$$\begin{aligned} Ea_2 &= E[-12FG^2(e_1^2 + e_2^2) + 12E^2F(g_1^2 + g_2^2) \\ &\quad + 24EG^2(e_1f_1 + e_2f_2) - 24E^2G(f_1g_1 + f_2g_2)] \\ &= -12EFG^2(e_1^2 + e_2^2) + 12E^3F(g_1^2 + g_2^2) \\ &\quad + 24E^2G^2(e_1f_1 + e_2f_2) - 24E^3G(f_1g_1 + f_2g_2). \end{aligned}$$

Verificando o lado direito da igualdade, temos

$$\begin{aligned} -6Ga_0 + 3Fa_1 &= -6G[4F(EG - 2F^2)(e_1^2 + e_2^2) - 4E(EG - 4F^2)(e_1f_1 + e_2f_2) \\ &\quad - 8E^2F(f_1^2 + f_2^2) - 4E^2F(e_1g_1 + e_2g_2) + 4E^3(f_1g_1 + f_2g_2)] \\ &\quad + 3F[4E^3(g_1^2 + g_2^2) + 4G(EG - 4F^2)(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad + 32EFG(e_1f_1 + e_2f_2) - 16E^2G(f_1^2 + f_2^2) \\ &\quad - 8E^2G(e_1g_1 + e_2g_2)] \\ &= [(-24EFG^2 + 12F^3G + 12EFG^2 - 12F^3G)(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad + (48E^2GF - 48E^2GF)(f_1^2 + f_2^2) + (12E^3F)(g_1^2 + g_2^2) \\ &\quad + (24E^2G^2 - 96EGF^2 + 96EGF^2)(e_1f_1 + e_2f_2) \\ &\quad + (24E^2FG - 24E^2FG)(e_1g_1 + e_2g_2) + (-24E^2G)(f_1g_1 + f_2g_2)] \\ &= -12EFG^2(e_1^2 + e_2^2) + 12E^3F(g_1^2 + g_2^2) \\ &\quad + 24E^2G^2(e_1f_1 + e_2f_2) - 24E^3G(f_1g_1 + f_2g_2), \end{aligned}$$

portanto a igualdade é verdadeira.

b) Seja $E^2a_3 = (4F^2 - EG)a_1 - 8FGa_0$, verificando o lado esquerdo da igualdade, temos

$$\begin{aligned} E^2a_3 &= E^2[-4E(EG - 4F^2)(g_1^2 + g_2^2) - 4G^3(e_1^2 \\ &\quad + e_2^2) - 32EFG(f_1g_1 + f_2g_2) + 16EG^2(f_1^2 + f_2^2) \\ &\quad + 8EG^2(e_1g_1 + e_2g_2)] \\ &= (-4E^4G + 16E^3F^2)(g_1^2 + g_2^2) - 4E^2G^3(e_1^2 \\ &\quad + e_2^2) - 32E^3FG(f_1g_1 + f_2g_2) \\ &\quad + 16E^3G^2(f_1^2 + f_2^2) + 8E^3G^2(e_1g_1 + e_2g_2). \end{aligned}$$

Verificando o lado direito da igualdade, temos

$$\begin{aligned} (4F^2 - EG)a_1 - 8FGa_0 &= (4F^2 - EG)[4E^3(g_1^2 + g_2^2) \\ &\quad + 4G(EG - 4F^2)(e_1^2 + e_2^2) + 32EFG(e_1f_1 + e_2f_2) \\ &\quad - 16E^2G(f_1^2 + f_2^2) - 8E^2G(e_1g_1 + e_2g_2)] \\ &\quad - 8FG[4F(EG - 2F^2)(e_1^2 + e_2^2) - 4E(EG - 4F^2)(e_1f_1 + e_2f_2) \\ &\quad - 8E^2F(f_1^2 + f_2^2) - 4E^2F(e_1g_1 + e_2g_2) \\ &\quad + 4E^3(f_1g_1 + f_2g_2)] \\ &= (16EF^2G^2 - 64F^4G - 4E^2G^3)(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad + (16EF^2G^2 - 32EF^2G^2 + 64F^4G)(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad + (-64E^2F^2 + 16E^3G^2 + 64E^2F^2G)(f_1^2 + f_2^2) \\ &\quad + (16F^2E^3 - 4E^4G)((g_1^2 + g_2^2)) \\ &\quad + (128EF^3G - 32E^2FG^2 + 32E^2FG^2 - 128EF^3G)(e_1f_1 + e_2f_2) \\ &\quad + (-32E^2F^2G + 8E^3G^2 + 32E^2F^2G)(e_1g_1 + e_2g_2) \\ &\quad + (32E^3FG)(f_1g_1 + f_2g_2) \\ &= (-4E^4G + 16E^3F^2)(g_1^2 + g_2^2) - 4E^2G^3(e_1^2 + e_2^2) \\ &\quad - 32E^3FG(f_1g_1 + f_2g_2) + 16E^3G^2(f_1^2 + f_2^2) \\ &\quad + 8E^3G^2(e_1g_1 + e_2g_2), \end{aligned}$$

portanto a igualdade é verdadeira.

c) Seja $E^3a_4 = G(EG - 4F^2)a_0 + F(2F^2 - EG)a_1$, verificando o lado esquerdo da igualdade, temos

$$\begin{aligned}
E^3 a_4 &= E^3[-4F(EG - F^2)(g_1^2 + g_2^2) + 4G(EG - 4F^2)(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\
&+ 8FG^2(f_1^2 + f_2^2) + 4FG^2(e_1 g_1 + e_2 g_2) - 4G^3(e_1 f_1 + e_2 f_2)] \\
&= -4F(E^4 G - F^2)(g_1^2 + g_2^2) + 4G(E^4 G - 4F^2)(f_1 g_1 + f_2 g_2) + 8E^3 FG^2(f_1^2 + f_2^2) \\
&+ 4E^3 FG^2(e_1 g_1 + e_2 g_2) - 4E^3 G^3(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
&= 8E^3 FG^2(f_1^2 + f_2^2) + (8E^3 F^3 - 4E^4 FG)(g_1^2 + g_2^2) \\
&- 4E^3 G^3(e_1 f_1 + e_2 f_2) + 4E^3 FG^2(e_1 g_1 + e_2 g_2) + (4E^4 G^2 - 16E^3 F^2 G)(f_1 g_1 + f_2 g_2).
\end{aligned}$$

Verificando o lado direito da igualdade, temos

$$\begin{aligned}
G(EG - 4F^2)a_0 + F(2F^2 - EG)a_1 &= G(EG - 4F^2)[4F(EG - 2F^2)(e_1^2 + e_2^2) \\
&- 4E(EG - 4F^2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) - 8E^2 F(f_1^2 + f_2^2) \\
&- 4E^2 F(e_1 g_1 + e_2 g_2) + 4E^3(f_1 g_1 + f_2 g_2)] \\
&+ F(2F^2 - EG)[4E^3(g_1^2 + g_2^2) \\
&+ 4G(EG - 4F^2)(e_1^2 + e_2^2) + 32EFG(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
&- 16E^2 G(f_1^2 + f_2^2) - 8E^2 G(e_1 g_1 + e_2 g_2)] \\
&= (4E^2 FG^3 - 8EF^3 G^2 - 16EF^3 G^2)(e_1^2 + e_2^2) \\
&+ (32F^5 G + 8EF^3 G^2 - 32F^5 G)(e_1^2 + e_2^2) \\
&- (4E^2 FG^3 + 16EF^3 G^2)(e_1^2 + e_2^2) \\
&+ (-8E^3 FG^2 + 32E^2 F^3 G - 32E^2 F^3 G)(f_1^2 + f_2^2) \\
&+ (16E^3 FG^2)(f_1^2 + f_2^2) + (8E^3 F^3 - 4E^4 FG)(g_1^2 + g_2^2) \\
&+ (-4E^3 G^3 + 16E^2 F^2 G^2 + 16E^2 F^2 G^2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
&- (64EF^4 G + 64EF^4 G - 32E^2 F^2 G^2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\
&+ (-4E^3 FG^2 + 16E^2 FG^3 - 16E^2 FG^3)(e_1 g_1 + e_2 g_2) \\
&+ (-16E^2 FG^3 + 8E^3 FG^2)(e_1 g_1 + e_2 g_2) \\
&+ (4E^4 G^2 - 16E^3 F^2 G)(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\
&= 8E^3 FG^2(f_1^2 + f_2^2) + (8E^3 F^3 - 4E^4 FG)(g_1^2 + g_2^2) \\
&- 4E^3 G^3(e_1 f_1 + e_2 f_2) + 4E^3 FG^2(e_1 g_1 + e_2 g_2) \\
&+ (4E^4 G^2 - 16E^3 F^2 G)(f_1 g_1 + f_2 g_2).
\end{aligned}$$

portanto vale a igualdade.

□

Proposição 7. Considere uma imersão $\alpha : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, de classe C^r , com $r \geq 4$, de uma superfície suave e orientada. Considere a 1^a e 2^a formas fundamentais onde $\{N_1, N_2\}$ é uma base ortonormal. Então

i) A equação diferencial das linhas de curvaturas axiais são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= [a_0 G(EG - 4F^2) + a_1 F(2F^2 - EG)]dy^4 + [-8a_0 EFG + a_1 E(4F^2 - EG)]dy^3 dx \quad (1.3.3) \\
&+ (-6a_0 GE^2 + 3a_1 FE^2)dy^2 dx^2 + a_1 E^3 dy dx^3 + a_0 E^3 dx^4 = 0.
\end{aligned}$$

ii) Os pontos axiumbólicos de α são dados por $a_0 = a_1 = 0$.

Demonstração. i) Multiplicando a equação das linhas de curvatura axial por E^3 , temos

$$E^3.a_4 dy^4 + E^3.a_3 dy^3 dx + E^3.a_2 dy^2 dx^2 + E^3.a_1 dy dx^3 + E^3.a_0 dx^4 = 0$$

$$E^3.a_4 dy^4 + E(E^2.a_3)dy^3 dx + E^2(E.a_2)dy^2 dx^2 + E^3.a_1 dy dx^3 + E^3.a_0 dx^4 = 0$$

faça $E^3.a_4, E^2.a_3$ e $E.a_2$ como no lema anterior.

ii) Basta observar a igualdade $\mathcal{G} = 0$, e notar que os coeficientes E, F e G são diferentes de zero, portanto $a_0 = a_1 = 0$.

□

Os pontos axiumbólicos de α são definidos pela interseção das curvas $a_0(x, y) = 0$ e $a_1(x, y) = 0$. Assuma sem perda de generalidade que intersectam-se em $(x, y) = (0, 0)$. Um ponto axiumbólico dado por $(x, y) = (0, 0)$ é dito **transversal**, se

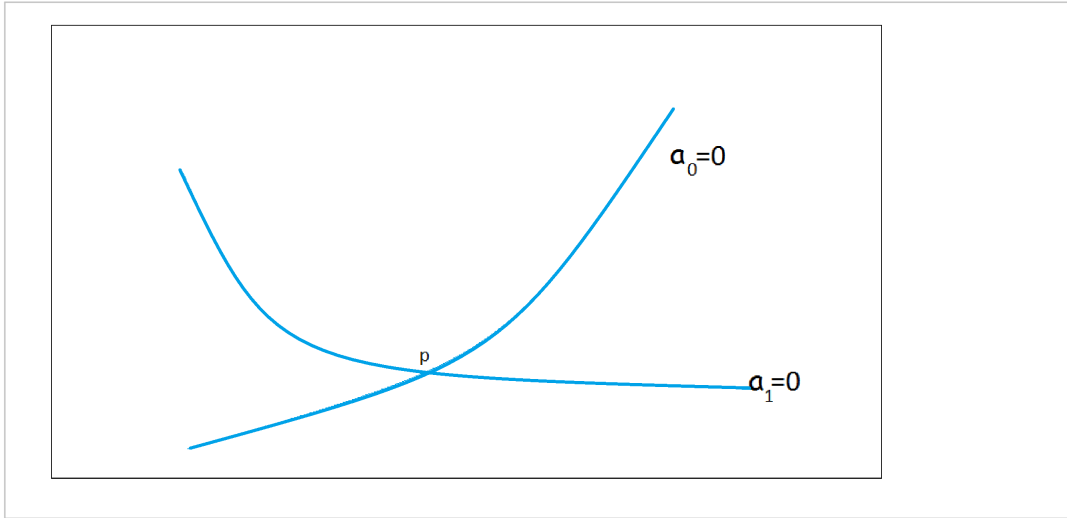


Figura 1.6: Ponto axiumbólico transversal

$$\frac{\partial(a_0, a_1)}{\partial(x, y)} \Big|_{(0,0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial a_0}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial a_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial a_1}{\partial y}(0,0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Um ponto axiumbólico dado por $(x, y) = (0, 0)$ é dito do **tipo quadrático**, se a matriz

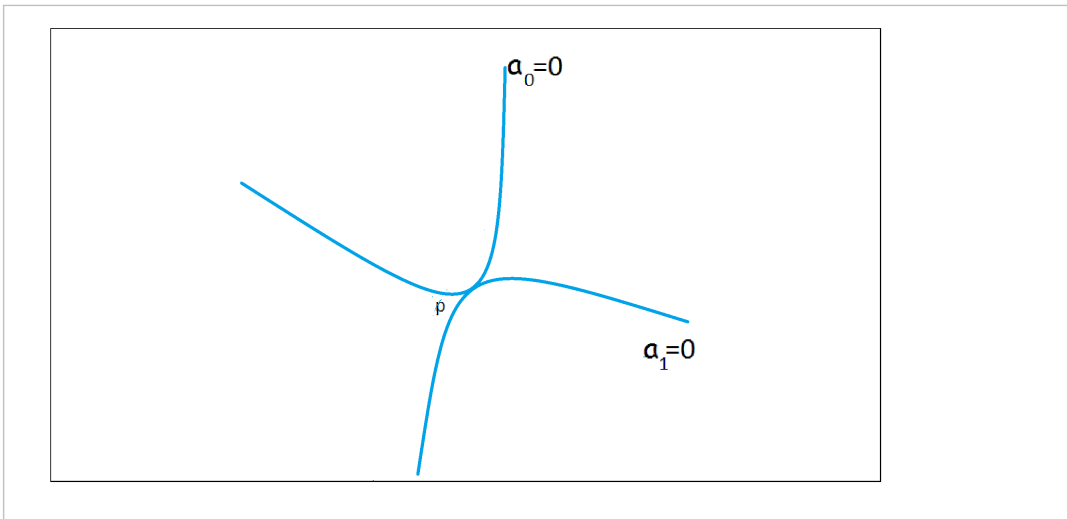


Figura 1.7: Ponto axiumbólico quadrático

$$\frac{\partial(a_0, a_1)}{\partial(x, y)} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial a_0}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial a_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial a_1}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix}$$

têm posto 1 e assumindo que $\frac{\partial a_0}{\partial y} \neq 0$, deduz-se do Teorema da Função Ímplicita que $\varphi(x)$ é uma única solução de

$$a_0(x, \varphi(x)) = 0.$$

Seja

$$s(x) = a_1(x, \varphi(x)),$$

se $\varphi(0) = 0$, então

$$s(0) = a_1(0, \varphi(0)) = a_1(0, 0) = 0$$

segue que

$$s'(0) = \frac{\partial a_1}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial a_1}{\partial y}(0, 0) \cdot \varphi'(0)$$

pelo Teorema da Função Ímplicita, temos

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial a_0}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial a_0}{\partial y}(0, 0)}$$

assim,

$$\begin{aligned} s'(0) &= -\frac{\frac{\partial a_0}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial a_0}{\partial y}(0, 0)} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial y}(0, 0) - \frac{\partial a_1}{\partial x}(0, 0) \\ s'(0) &= -\frac{1}{\frac{\partial a_0}{\partial y}(0, 0)} \left(\frac{\partial a_0}{\partial x}(0, 0) \cdot \frac{\partial a_1}{\partial y}(0, 0) - \frac{\partial a_0}{\partial y}(0, 0) \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x}(0, 0) \right) \\ s'(0) &= -\frac{1}{\frac{\partial a_0}{\partial y}(0, 0)} \cdot \frac{\partial(a_0, a_1)}{\partial(x, y)}|_{(0,0)} \end{aligned}$$

portanto, $s'(0) = 0$.

Temos que $s''(0) \neq 0$, de fato suponha que

$$s''(0) = 0 \Rightarrow s(0) = s'(0) = 0$$

dessa forma o ponto seria degenerado.

Uma análise similar pode ser feita com os outros elementos diferentes de zero da matriz

$$\frac{\partial(a_0, a_1)}{\partial(x, y)}|_{(0,0)}.$$

Observação 5. Quando as coordenadas são isotérmicas, ou seja, $E = G$ e $F = 0$, temos que

$$a_1 = -a_3 = E^3[e_1^2 + e_2^2 + g_1^2 + g_2^2 - 4(f_1^2 + f_2^2) - 2(e_1g_1 + e_2g_2)]$$

$$a_0 = a_4 = -\frac{a_2}{6} = 4E^3[f_1g_1 + f_2g_2 - (e_1f_1 + e_2f_2)].$$

e a equação diferencial se reduz à:

$$a_0(dy^4 - 6dy^2dx^2 + dx^4) + a_1(dx^2 - dy^2)dxdy = 0$$

Proposição 8. *Suponha que a imagem da superfície M por α está contida em \mathbb{R}^3 com*

$$e_2 = f_2 = g_2 = 0.$$

Então a equação diferencial 1.3.3 é o produto da equação diferencial das linhas de curvatura principal e a equação diferencial das linhas de curvatura média, isto é, a equação diferencial quártica 1.3.3 é dada por

$$Jac(II_\alpha, I_\alpha) \cdot Jac(Jac(II_\alpha, I_\alpha), I_\alpha) = 0 \quad (1.3.4)$$

Demonstração. Sabendo que $e_2 = f_2 = g_2 = 0$, temos

$$a_4 = -4F(EG - F^2)g_1^2 + 4G(EG - 4F^2)f_1g_1 + 8FG^2f_1^2 + 4FG^2e_1g_1 - 4G^3e_1f_1,$$

$$a_3 = -4E(EG - 4F^2)g_1^2 - 4G^3e_1^2 - 32EFGf_1g_1 + 16EG^2f_1^2 + 8EG^2e_1g_1,$$

$$a_2 = -12FG^2e_1^2 + 12E^2Fg_1^2 + 24EG^2e_1f_1 - 24E^2Gf_1g_1,$$

$$a_1 = 4E^3g_1^2 + 4G(EG - 4F^2)e_1^2 + 32EFGe_1f_1 - 16E^2Gf_1^2 - 8E^2Ge_1g_1,$$

$$a_0 = 4F(EG - 2F^2)e_1^2 - 4E(EG - 4F^2)e_1f_1 - 8E^2Ff_1^2 - 4E^2Fe_1g_1 + 4E^3f_1g_1.$$

Dessa forma podemos fatorar a equação

$$a_4dy^4 + a_3dy^3dx + a_2dy^2dx^2 + a_1dydx^3 + a_0dx^4 = 0,$$

em um produto de duas equações quadráticas

$$[(Ef_1 - Fe_1)dx^2 + (Eg_1 - e_1G)dxdy + (Fg_1 - f_1G)dy^2] \cdot \{e_1(EG - 2F^2) + 2EFf_1 - E^2g_1\}dx^2 \\ + (4f_1EG - 2EFg_1 - 2FGe_1)dxdy + [g_1(EG - 2F^2) + 2f_1FG - e_1G^2]dy^2\} = 0.$$

Afirmção 1. *A equação diferencial da linha de curvatura principal é dada por $Jac(II_\alpha, I_\alpha) = 0$, além disso*

$$Jac(II_\alpha, I_\alpha) = (Ef_1 - Fe_1)dx^2 + (Eg_1 - e_1G)dxdy + (Fg_1 - f_1G)dy^2.$$

Demonstração. De fato, temos

$$Jac(II_\alpha, I_\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\partial II_\alpha}{\partial(dx)} & \frac{\partial II_\alpha}{\partial(dy)} \\ \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dx)} & \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dy)} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2e_1dx + 2f_1dy & 2f_1dx + 2g_1dy \\ 2Edx + 2Fdy & 2Fdx + 2Gdy \end{vmatrix} = 0$$

$$(Ef_1 - Fe_1)dx^2 + (Eg_1 - e_1G)dxdy + (Fg_1 - f_1G)dy^2 = 0.$$

□

Afirmção 2. *A equação diferencial da linha de curvatura média é dada por $Jac(Jac(II_\alpha, I_\alpha), I_\alpha) = 0$, além disso*

$$Jac(Jac(II_\alpha, I_\alpha), I_\alpha) = [e_1(EG - 2F^2) + 2EFf_1 - E^2g_1]dx^2 \\ + (4f_1EG - 2EFg_1 - 2FGe_1)dxdy + [g_1(EG - 2F^2) + 2f_1FG - e_1G^2]dy^2.$$

Demonstração. De fato, temos

$$Jac(Jac(II_\alpha, I_\alpha), I_\alpha) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Jac(II_\alpha, I_\alpha)}{\partial(dx)} & \frac{\partial Jac(II_\alpha, I_\alpha)}{\partial(dy)} \\ \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dx)} & \frac{\partial I_\alpha}{\partial(dy)} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} 2(Ef_1 - Fe_1)dx + (Eg_1 - e_1G)dy & (Eg_1 - e_1G)dx + 2(Fg_1 - f_1G)dy \\ 2Edx + 2Fdy & 2Fdx + 2Gdy \end{array} \right| = 0$$

$$\begin{aligned} & 2[2(Ef_1 - Fe_1)dx + (Eg_1 - e_1G)dy](Fdx + Gdy) \\ & - 2[(Eg_1 - e_1G)dx + 2(Fg_1 - f_1G)dy](Edx + Fdy) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [e_1(EG - 2F^2) + 2EFf_1 - E^2g_1]dx^2 + (4f_1EG - 2EFg_1 - 2FGe_1)dxdy \\ & + [g_1(EG - 2F^2) + 2f_1FG - e_1G^2]dy^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Pelas afirmações 1 e 2, concluímos que

$$Jac(II_\alpha, I_\alpha) \cdot Jac(Jac(II_\alpha, I_\alpha), I_\alpha) = 0.$$

□

1.4 Equações diferenciais das linhas axiais em uma Carta de Monge

Uma superfície M localmente parametrizada por uma carta de Monge, próximo a um ponto axiumbílico \mathbf{p} será dada por:

$$z = R(x, y)$$

$$w = S(x, y)$$

onde

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \frac{r_{20}}{2}x^2 + r_{11}xy + \frac{r_{02}}{2}y^2 + \frac{r_{30}}{6}x^3 + \frac{r_{21}}{2}x^2y + \frac{r_{12}}{2}xy^2 + \frac{r_{03}}{6}y^3 \\ &+ \frac{r_{40}}{24}x^4 + \frac{r_{31}}{6}x^3y + \frac{r_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{r_{13}}{6}xy^3 + \frac{r_{04}}{24}y^4 + h.o.t., \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \frac{s_{20}}{2}x^2 + s_{11}xy + \frac{s_{02}}{2}y^2 + \frac{s_{30}}{6}x^3 + \frac{s_{21}}{2}x^2y + \frac{s_{12}}{2}xy^2 + \frac{s_{03}}{6}y^3 \\ &+ \frac{s_{40}}{24}x^4 + \frac{s_{31}}{6}x^3y + \frac{s_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{s_{13}}{6}xy^3 + \frac{s_{04}}{24}y^4 + h.o.t.. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

No ponto $(x, y, R(x, y), S(x, y))$ o plano tangente para a superfície é gerado por $\{t_1, t_2\}$, com

$$t_1 = (1, 0, R_x, S_x) \quad e \quad t_2 = (0, 1, R_y, S_y)$$

onde,

$$\begin{aligned} R_x(x, y) &= r_{20}x + r_{11}y + \frac{r_{30}}{2}x^2 + r_{21}xy + \frac{r_{12}}{2}y^2 + \frac{r_{40}}{6}x^3 + \frac{r_{31}}{2}x^2y + \frac{r_{22}}{2}xy^2 + \frac{r_{13}}{6}y^3 \\ R_y(x, y) &= r_{11}x + r_{02}y + \frac{r_{21}}{2}x^2 + r_{12}xy + \frac{r_{03}}{2}y^2 + \frac{r_{31}}{6}x^3 + \frac{r_{22}}{2}x^2y + \frac{r_{13}}{2}xy^2 + \frac{r_{04}}{6}y^3 \\ S_x(x, y) &= s_{20}x + s_{11}y + \frac{s_{30}}{2}x^2 + s_{21}xy + \frac{s_{12}}{2}y^2 + \frac{s_{40}}{6}x^3 + \frac{s_{31}}{2}x^2y + \frac{s_{22}}{2}xy^2 + \frac{s_{13}}{6}y^3 \end{aligned}$$

$$S_y(x, y) = s_{11}x + s_{02}y + \frac{s_{21}}{2}x^2 + s_{12}xy + \frac{s_{03}}{2}y^2 + \frac{s_{31}}{6}x^3 + \frac{s_{22}}{2}x^2y + \frac{s_{13}}{2}xy^2 + \frac{s_{04}}{6}y^3$$

O plano normal é gerado por $\{N_1, N_2\}$, onde

$$N_1 = \frac{\widehat{N}_1}{|\widehat{N}_1|} \quad e \quad N_2 = \frac{\widehat{N}_2}{|\widehat{N}_2|}$$

sendo definidos $\widehat{N}_1, \widehat{N}_2$ por

$$\widehat{N}_1 = (-R_x, -R_y, 1, 0) \quad e \quad \widehat{N}_2 = t_1 \wedge t_2 \wedge \widehat{N}_1,$$

podemos obter \widehat{N}_2 pela relação

$$\det(t_1, t_2, \widehat{N}_1, \bullet) = \langle \widehat{N}_2, \bullet \rangle.$$

Assim,

$$\widehat{N}_2 = (-S_x(1 + R_y^2) + R_x R_y S_y, -S_y(1 + R_x^2) + R_x R_y S_x, -S_x R_x - R_y S_y, 1 + R_x^2 + R_y^2)$$

temos ainda

$$t_{11} = (0, 0, R_{xx}, S_{xx}) \quad , \quad t_{12} = (0, 0, R_{xy}, S_{xy}) \quad , \quad t_{22} = (0, 0, R_{yy}, S_{yy})$$

onde

$$R_{xx}(x, y) = r_{20} + r_{30}x + r_{21}y + \frac{r_{40}}{2}x^2 + r_{31}xy + \frac{r_{22}}{2}y^2$$

$$R_{yy}(x, y) = r_{02} + r_{12}x + r_{03}y + \frac{r_{22}}{2}x^2 + r_{13}xy + \frac{r_{04}}{2}y^2$$

$$R_{xy}(x, y) = R_{yx}(x, y) = r_{11} + r_{21}x + r_{12}y + \frac{r_{31}}{2}x^2 + r_{22}xy + \frac{r_{13}}{2}y^2$$

$$S_{xx}(x, y) = s_{20} + s_{30}x + s_{21}y + \frac{s_{40}}{2}x^2 + s_{31}xy + \frac{s_{22}}{2}y^2$$

$$S_{yy}(x, y) = s_{02} + s_{12}x + s_{03}y + \frac{s_{22}}{2}x^2 + s_{13}xy + \frac{s_{04}}{2}y^2$$

$$S_{xy}(x, y) = S_{yx}(x, y) = s_{11} + s_{21}x + s_{12}y + \frac{s_{31}}{2}x^2 + s_{22}xy + \frac{s_{13}}{2}y^2.$$

Sendo assim obtemos a 1ª forma fundamental em uma carta de Monge. Teremos

$$E = \langle t_1, t_1 \rangle = \langle (1, 0, R_x, S_x), (1, 0, R_x, S_x) \rangle = 1 + R_x^2 + S_x^2$$

o termo $R_x^2 + R_y^2$ terá grau maior ou igual que 2. Logo

$$E = 1 + O(2).$$

Da mesma forma, teremos

$$F = \langle t_1, t_2 \rangle = \langle (1, 0, R_x, S_x), (0, 1, R_y, S_y) \rangle = R_x R_y + S_x S_y$$

$$F = O(2).$$

Temos ainda,

$$G = \langle t_2, t_2 \rangle = \langle (0, 1, R_y, S_y), (0, 1, R_y, S_y) \rangle = 1 + R_y^2 + S_y^2$$

$$G = 1 + O(2).$$

Obtemos também a 2ª forma fundamental em uma carta de Monge. Teremos

$$e_1 = \langle t_{11}, N_1 \rangle = r_{20} + r_{30}x + r_{21}y + O(2) , \quad e_2 = \langle t_{11}, N_2 \rangle = s_{20} + s_{30}x + s_{21}y + O(2)$$

$$f_1 = \langle t_{12}, N_1 \rangle = r_{11} + r_{21}x + r_{12}y + O(2) , \quad f_2 = \langle t_{12}, N_2 \rangle = s_{11} + s_{21}x + s_{12}y + O(2)$$

$$g_1 = \langle t_{22}, N_1 \rangle = r_{02} + r_{12}x + r_{03}y + O(2) , \quad g_2 = \langle t_{22}, N_2 \rangle = s_{02} + s_{12}x + s_{03}y + O(2).$$

Proposição 9. *Os pontos axiumbílicos são dados por*

$$a_0(x, y) = 0 \quad e \quad a_1(x, y) = 0,$$

na vizinhança de $(0, 0)$, segue que

$$a_0(x, y) = a_{00}^0 + a_{10}^0 x + a_{01}^0 y + O(2)$$

$$a_1(x, y) = a_{00}^1 + a_{10}^1 x + a_{01}^1 y + O(2),$$

onde

$$a_{00}^0 = r_{11}(r_{02} - r_{20}) + s_{11}(s_{02} - s_{20})$$

$$a_{10}^0 = r_{21}(r_{02} - r_{20}) + r_{11}(r_{12} - r_{30}) + s_{11}(s_{12} - s_{30}) + s_{21}(s_{02} - s_{20})$$

$$a_{01}^0 = r_{12}(r_{02} - r_{20}) + r_{11}(r_{03} - r_{21}) + s_{11}(s_{03} - s_{21}) + s_{12}(s_{02} - s_{20})$$

$$e \quad a_{00}^1 = (r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 - 4(r_{11}^2 + s_{11}^2)$$

$$a_{10}^1 = 2(r_{12} - r_{30})(r_{02} - r_{20}) + 2(s_{12} - s_{30})(s_{02} - s_{20}) - 8(r_{21}r_{11} + s_{21}s_{11})$$

$$a_{01}^1 = 2(r_{03} - r_{21})(r_{02} - r_{20}) + 2(s_{03} - s_{21})(s_{02} - s_{20}) - 8(r_{12}r_{11} + s_{12}s_{11}).$$

Demonstração. De fato, para $a_0(x, y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} a_0 &= 4F(EG - 2F^2)(e_1^2 + e_2^2) - 4E(EG - 4F^2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\ &\quad - 8E^2 F(f_1^2 + f_2^2) - 4E^2 F(e_1 g_1 + e_2 g_2) + 4E^3(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\ &= O(2) - 4(1 + O(2))[(1 + O(2))(1 + O(2)) + O(2)](e_1 f_1 + e_2 f_2) \\ &\quad + O(2) + O(2) + 4(1 + O(2))(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\ &= -4(1 + O(2))(1 + O(2))(e_1 f_1 + e_2 f_2) + 4(1 + O(2))(f_1 g_1 + f_2 g_2) + O(2) \\ &= -4[(r_{20} + r_{30}x + r_{21}y + O(2))(r_{11} + r_{21}x + r_{12}y + O(2)) \\ &\quad + (s_{20} + s_{30}x + s_{21}y + O(2))(s_{11} + s_{21}x + s_{12}y + O(2))] \\ &\quad + 4[(r_{11} + r_{21}x + r_{12}y + O(2))(r_{02} + r_{12}x + r_{03}y + O(2)) \\ &\quad + (s_{11} + s_{21}x + s_{12}y + O(2))(s_{02} + s_{12}x + s_{03}y + O(2))] + O(2) \\ &= -4[r_{20}r_{11} + (r_{20}r_{21} + r_{30}r_{11})x + (r_{20}r_{12} + r_{21}r_{11})y \\ &\quad + s_{20}s_{11} + (s_{20}s_{21} + s_{30}s_{11})x + (s_{20}s_{12} + s_{21}s_{11})y + O(2)] \\ &\quad + 4[r_{02}r_{11} + (r_{02}r_{21} + r_{12}r_{11})x + (r_{02}r_{12} + r_{03}r_{11})y \\ &\quad + s_{02}s_{11} + (s_{02}s_{21} + s_{12}s_{11})x + (s_{02}s_{12} + s_{03}s_{11})y + O(2)] + O(2) \\ &= (r_{02}r_{11} - r_{20}r_{11}) + [(r_{02}r_{21} + r_{12}r_{11}) - (r_{20}r_{21} + r_{30}r_{11})]x \\ &\quad + [(r_{02}r_{12} + r_{03}r_{11}) - (r_{20}r_{12} + r_{21}r_{11})]y \\ &\quad + (s_{02}s_{11} - s_{20}s_{11}) + [(s_{02}s_{21} + s_{12}s_{11}) - (s_{20}s_{21} + s_{30}s_{11})]x \\ &\quad + [(s_{02}s_{12} + s_{03}s_{11}) - (s_{20}s_{12} + s_{21}s_{11})]y + O(2) \\ &= r_{11}(r_{02} - r_{20}) + s_{11}(s_{02} - s_{20}) + [r_{11}(r_{12} - r_{30}) + r_{21}(r_{02} - r_{20}) \\ &\quad + s_{11}(s_{12} - s_{30}) + s_{21}(s_{02} - s_{20})]x + [r_{11}(r_{03} - r_{21}) + r_{12}(r_{02} - r_{20}) \\ &\quad + s_{11}(s_{03} - s_{21}) + s_{12}(s_{02} - s_{20})]y + O(2). \end{aligned}$$

Usando a notação da hipótese, temos

$$a_0(x, y) = a_{00}^0 + a_{10}^0 x + a_{01}^0 y + O(2).$$

Para $a_1(x, y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 4E^3(g_1^2 + g_2^2) + 4G(EG - 4F^2)(e_1^2 + e_2^2) \\ &+ 32EFG(e_1 f_1 + e_2 f_2) - 16E^2G(f_1^2 + f_2^2) - 8E^2G(e_1 g_1 + e_2 g_2) \\ &= 4(1 + O(2))[(r_{02} + r_{12}x + r_{03}y + O(2))^2 + (s_{02} + s_{12}x + s_{03}y + O(2))^2] \\ &+ 4(1 + O(2))[(r_{20} + r_{30}x + r_{21}y + O(2))^2 + (s_{20} + s_{30}x + s_{21}y + O(2))^2] \\ &- 16(1 + O(2))[(r_{11} + r_{21}x + r_{12}y + O(2))^2 + (s_{11} + s_{21}x + s_{12}y + O(2))^2] \\ &- 8(1 + O(2))[(r_{20} + r_{30}x + r_{21}y + O(2))(r_{02} + r_{12}x + r_{03}y + O(2)) \\ &+ (s_{20} + s_{30}x + s_{21}y + O(2))(s_{02} + s_{12}x + s_{03}y + O(2))] + O(2) \\ &= 4[r_{02}^2 + 2r_{02}r_{12}x + 2r_{02}r_{03}y + s_{02}^2 + 2s_{02}s_{12}x + 2s_{02}s_{03}y + O(2)] \\ &+ 4[r_{20}^2 + 2r_{20}r_{30}x + 2r_{20}r_{21}y + s_{20}^2 + 2s_{20}s_{30}x + 2s_{20}s_{21}y + O(2)] \\ &- 16[r_{11}^2 + 2r_{11}r_{21}x + 2r_{11}r_{12}y + s_{11}^2 + 2s_{11}s_{21}x + 2s_{11}s_{12}y + O(2)] \\ &- 8[r_{20}r_{02} + r_{20}r_{12}x + r_{20}r_{03}y + r_{02}r_{30}x + r_{02}r_{21}y \\ &+ s_{20}s_{02} + s_{20}s_{12}x + s_{20}s_{03}y + s_{02}s_{30}x + s_{02}s_{21}y + O(2)] \\ &= r_{02}^2 + r_{20}^2 - 2r_{02}r_{20} + s_{02}^2 + s_{20}^2 - 2s_{02}s_{20} \\ &- 4(r_{11}^2 + s_{11}^2) + [2(r_{02}r_{12} + r_{20}r_{30} - r_{20}r_{12} - r_{02}r_{30} + s_{02}s_{12} \\ &+ s_{20}s_{30} - s_{20}s_{12} - s_{02}s_{30}) - 8(r_{11}r_{21} + s_{11}s_{21})] \\ &+ [2(r_{02}r_{03} + r_{20}r_{21} - r_{20}r_{03} - r_{02}r_{21} + s_{02}s_{03} \\ &+ s_{20}s_{21} - s_{20}s_{03} - s_{02}s_{21}) - 8(r_{11}r_{12} + s_{11}s_{12})] + O(2) \\ &= (r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 - 4(r_{11}^2 + s_{11}^2) \\ &+ 2[r_{02}(r_{12} - r_{30}) - r_{20}(r_{12} - r_{30}) + s_{02}(s_{12} - s_{30}) \\ &- s_{20}(s_{12} - s_{30}) - 4(r_{11}r_{21} + s_{11}s_{21})] \\ &+ 2[r_{02}(r_{03} - r_{21}) - r_{20}(r_{21} - r_{03}) + s_{02}(s_{03} - s_{21}) \\ &- s_{20}(s_{21} - s_{03}) - 4(r_{11}r_{12} + s_{11}s_{12})] + O(2) \\ &= (r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 - 4(r_{11}^2 + s_{11}^2) \\ &+ 2[(r_{02} - r_{20})(r_{12} - r_{30}) + (s_{02} - s_{20})(s_{12} - s_{30}) - 4(r_{11}r_{21} + s_{11}s_{21})] \\ &+ 2[(r_{02} - r_{20})(r_{03} - r_{21}) + (s_{02} - s_{20})(s_{03} - s_{21}) \\ &- 4(r_{11}r_{12} + s_{11}s_{12})] + O(2). \end{aligned}$$

Usando a notação da hipótese, temos

$$a_1(x, y) = a_{00}^1 + a_{10}^1 x + a_{01}^1 y + O(2).$$

□

Corolário 2. Um ponto \mathbf{p} expresso em uma carta de Monge por $(0, 0)$, é um ponto axiumbílico quando valem as seguintes relações:

$$\begin{cases} 2r_{11} = (s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = -(r_{02} - r_{20}) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2r_{11} = -(s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = (r_{02} - r_{20}) \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Demonstração. Sejam

$$a_0(x, y) = a_{00}^0 + a_{10}^0 x + a_{01}^0 y + O(2)$$

$$a_1(x, y) = a_{00}^1 + a_{10}^1 x + a_{01}^1 y + O(2),$$

no ponto $(0,0)$, teremos

$$a_0(0,0) = a_{00}^0 = 0 \quad e \quad a_1(0,0) = a_{00}^1 = 0,$$

portanto

$$\begin{cases} a_{00}^0 = r_{11}(r_{02} - r_{20}) + s_{11}(s_{02} - s_{20}) = 0 \\ a_{00}^1 = (r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 - 4(r_{11}^2 + s_{11}^2) = 0 \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Calculando o sistema, teremos

$$r_{11} = -\frac{s_{11}(s_{02} - s_{20})}{(r_{02} - r_{20})}.$$

Substituindo na linha 2 do sistema 1.4.4 , teremos

$$\begin{aligned} (r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 - 4 \left(\frac{s_{11}^2(s_{02} - s_{20})^2}{(r_{02} - r_{20})^2} + s_{11}^2 \right) &= 0 \\ (r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2 - 4 \frac{s_{11}^2}{(r_{02} - r_{20})^2} [(s_{02} - s_{20})^2 + (r_{02} - r_{20})^2] &= 0 \\ [(r_{02} - r_{20})^2 + (s_{02} - s_{20})^2] \left[1 - 4 \frac{s_{11}^2}{(r_{02} - r_{20})^2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 - 4 \frac{s_{11}^2}{(r_{02} - r_{20})^2} &= 0 \\ (r_{02} - r_{20})^2 - 4s_{11}^2 &= 0 \\ s_{11} &= \sqrt{\frac{(r_{02} - r_{20})^2}{4}} \\ 2s_{11} &= \pm(r_{02} - r_{20}), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\frac{s_{11}(s_{02} - s_{20})}{(r_{02} - r_{20})} \\ 2r_{11} &= \pm(s_{02} - s_{20}). \end{aligned}$$

□

Observação 6. *Sejam*

$$r = r_{02} - r_{20} \quad , \quad s = s_{02} - s_{20} \quad e \quad \rho^2 = r_{11}^2 + s_{11}^2$$

então a condição para $(0,0)$ é um ponto axiumbílico é dada por

$$\begin{cases} r_{11} \cdot r + s_{11} \cdot s = 0 \\ r^2 + s^2 = 4\rho^2 \end{cases}.$$

Esta condição para um ponto axiumbílico pode ser interpretada como a interseção de um círculo e uma linha reta no plano (r, s) .

As interseções são dadas por:

$$\begin{cases} r_{11} = s/2 \\ s_{11} = -r/2 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} r_{11} = -s/2 \\ s_{11} = r/2 \end{cases} \quad (1.4.5)$$

O sistema 1.4.5 é uma outra forma para o sistema 1.4.3

Lema 3. *Seja \mathbf{p} um ponto axiumbílico com coordenadas $(0,0)$ na carta de Monge. A equação diferencial das linhas axiais na vizinhança de $(0,0)$ é dada por*

$$\hat{a}_0(x, y)(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + \hat{a}_1(x, y)(dx^2 - dy^2)dxdy + H(x, y, dx, dy) = 0, \quad (1.4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{a}_0(x, y) &= \frac{(r\alpha_1 + s\alpha_2)}{2}x + \frac{(r\alpha_3 + s\alpha_4)}{2}y + a_{20}^0x^2 + a_{11}^0xy + a_{02}^0y^2 \\ \hat{a}_1(x, y) &= 2(s\alpha_1 + r\alpha_2)x + 2(s\alpha_3 + r\alpha_4)y + a_{20}^1x^2 + a_{11}^1xy + a_{02}^1y^2, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s_{12} - s_{30} + 2r_{21} \\ \alpha_2 &= r_{30} - r_{12} + 2s_{21} \\ \alpha_3 &= s_{03} - s_{21} + 2r_{12} \\ \alpha_4 &= r_{21} - r_{03} + 2s_{12}. \end{aligned}$$

Onde H contém termos de ordem superior ou igual a 3 em (x, y) .

Demonstração. Sabemos que

$$a_0(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + a_1(dx^2 - dy^2)dxdy = 0,$$

onde

$$a_0(x, y) = a_{00}^0 + a_{10}^0x + a_{01}^0y + O(2)$$

$$a_1(x, y) = a_{00}^1 + a_{10}^1x + a_{01}^1y + O(2).$$

Na vizinhança de $(0,0)$, temos

$$a_{00}^0 = 0 \quad e \quad a_{00}^1 = 0,$$

assim

$$\hat{a}_0(x, y) = a_{10}^0x + a_{01}^0y + O(2)$$

$$\hat{a}_1(x, y) = a_{10}^1x + a_{01}^1y + O(2),$$

podemos escrever

$$a_{10}^0 = r_{21}(r_{20} - r_{02}) + r_{11}(r_{12} - r_{30}) + s_{11}(s_{12} - s_{30}) + s_{21}(s_{20} - s_{02}),$$

com $r_{20} - r_{02} = r$, $s_{20} - s_{02} = s$, $r_{11} = -s/2$ e $s_{11} = r/2$, logo

$$\begin{aligned} a_{10}^0 &= r \cdot r_{21} + \frac{r}{2}(s_{12} - s_{30}) - \frac{s}{2}(r_{30} - r_{12}) + s_{21}s \\ &= \frac{r}{2}(2r_{21} + s_{12} - s_{30}) + \frac{s}{2}(2s_{21} + r_{30} - r_{12}) \\ &= \frac{(r\alpha_1 + s\alpha_2)}{2}, \end{aligned}$$

da mesma forma, temos

$$\begin{aligned}
a_{01}^0 &= r_{12}(r_{02} - r_{20}) + r_{11}(r_{03} - r_{21}) + s_{11}(s_{03} - s_{21}) + s_{12}(s_{02} - s_{20}) \\
&= r \cdot r_{12} + \frac{r}{2}(s_{03} - s_{21}) - \frac{s}{2}(r_{03} - r_{21}) + s_{12}s \\
&= \frac{r}{2}(2r_{12} + s_{03} - s_{21}) + \frac{s}{2}(2s_{12} - r_{03} + r_{21}) \\
&= \frac{(r\alpha_3 + s\alpha_4)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{a}_0(x, y) = \frac{(r\alpha_1 + s\alpha_2)}{2}x + \frac{(r\alpha_3 + s\alpha_4)}{2}y + O(2).$$

A prova para $\hat{a}_1(x, y)$, segue de forma análoga. □

Com a notação da equação 1.4.6, a **condição de transversalidade** entre as curvas $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ é dada por

$$\begin{vmatrix} a_{10}^0 & a_{01}^0 \\ a_{10}^1 & a_{01}^1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{r\alpha_1 + s\alpha_2}{2} & \frac{r\alpha_3 + s\alpha_4}{2} \\ 2(s\alpha_1 - r\alpha_2) & 2(s\alpha_3 - r\alpha_4) \end{vmatrix} \neq 0 \\
&(r\alpha_1 + s\alpha_2)(s\alpha_3 - r\alpha_4) - (r\alpha_3 + s\alpha_4)(s\alpha_1 - r\alpha_2) = \\
&\quad r s \alpha_1 \alpha_3 - r^2 \alpha_1 \alpha_4 + s^2 \alpha_2 \alpha_3 - r s \alpha_2 \alpha_4 - \\
&\quad r s \alpha_1 \alpha_3 + r^2 \alpha_3 \alpha_2 - s^2 \alpha_1 \alpha_4 + r s \alpha_2 \alpha_4 = \\
&\quad r^2(\alpha_3 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_4) + s^2(\alpha_3 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_4) = \\
&\quad = [\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4](r^2 + s^2) \neq 0.
\end{aligned}$$

Se $r^2 + s^2 = 0$, temos que

$$a_{10}^0 = a_{01}^0 = a_{10}^1 = a_{01}^1 = 0,$$

portanto a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{10}^0 & a_{01}^0 \\ a_{10}^1 & a_{01}^1 \end{bmatrix}$$

é identicamente nula. Assim os pontos axiumbílicos com $r = s = 0$ formam um conjunto de codimensão pelo menos quatro.

Portanto a condição de transversalidade, se $r^2 + s^2 \neq 0$, é dada por

$$T := \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4 \neq 0.$$

Lema 4. *Considere a equação diferencial quártica*

$$(a_{10}^0 x + a_{01}^0 y)(dx^4 - 6dx^2 dy^2 + dy^4) + (a_{10}^1 x + a_{01}^1 y)(dx^2 - dy^2)dxdy = 0. \quad (1.4.8)$$

Considere a rotação

$$x = \cos \theta \cdot u + \sin \theta \cdot v \quad e \quad y = -\sin \theta \cdot u + \cos \theta \cdot v$$

onde θ é a raiz real da equação

$$-a_{01}^0 t^5 + (a_{10}^0 - a_{01}^1) t^4 + (6a_{01}^0 + a_{10}^1) t^3 + (a_{01}^1 - 6a_{10}^0) t^2 - (a_{01}^0 + a_{10}^1) t + a_{10}^0 = 0 \quad t = \tan \theta.$$

Então, segue que

$$\overline{a_{01}^0} v (du^4 - 6du^2 dv^2 + dv^4) + (\overline{a_{10}^1} u + \overline{a_{01}^1} v) (du^2 - dv^2) dudv = 0, \quad (1.4.9)$$

onde

$$\overline{a_{01}^0} = \overline{a_{01}^0}(a_{10}^0, a_{01}^0, a_{10}^1, a_{01}^1, \theta), \quad \overline{a_{10}^1} = \overline{a_{10}^1}(a_{10}^0, a_{01}^0, a_{10}^1, a_{01}^1, \theta) \quad e \quad \overline{a_{01}^1} = \overline{a_{01}^1}(a_{10}^0, a_{01}^0, a_{10}^1, a_{01}^1, \theta)$$

Demonstração. Fazendo, $x = \cos \theta \cdot u + \sin \theta \cdot v$ e $y = -\sin \theta \cdot u + \cos \theta \cdot v$. Daí obtemos $dx = \cos \theta \cdot du + \sin \theta \cdot dv$ e $dy = -\sin \theta \cdot du + \cos \theta \cdot dv$, substituindo estas equações em 1.4.8, temos

$$\begin{aligned} & -a_{01}^0 \cdot \sin^5 \theta + (a_{10}^0 - a_{01}^1) \sin^4 \theta \cdot \cos \theta + (6a_{01}^0 + a_{10}^1) \sin^3 \theta \cdot \cos^2 \theta \\ & + (a_{01}^1 - 6a_{10}^0) \sin^2 \theta \cdot \cos^3 \theta - (a_{01}^0 + a_{10}^1) \sin \theta \cdot \cos^4 \theta + a_{10}^0 \cdot \cos^5 \theta = 0, \end{aligned}$$

dividindo por $\cos^5 \theta$, teremos

$$\begin{aligned} & -a_{01}^0 \frac{\sin^5 \theta}{\cos^5 \theta} + (a_{10}^0 - a_{01}^1) \frac{\sin^4 \theta \cdot \cos \theta}{\cos^5 \theta} + (6a_{01}^0 + a_{10}^1) \frac{\sin^3 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\cos^5 \theta} \\ & + (a_{01}^1 - 6a_{10}^0) \frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^3 \theta}{\cos^5 \theta} - (a_{01}^0 + a_{10}^1) \frac{\sin \theta \cdot \cos^4 \theta}{\cos^5 \theta} + a_{10}^0 \frac{\cos^5 \theta}{\cos^5 \theta} = 0, \end{aligned}$$

assim, teremos

$$\begin{aligned} & -a_{01}^0 \cdot \tan^5 \theta + (a_{10}^0 - a_{01}^1) \tan^4 \theta + (6a_{01}^0 + a_{10}^1) \tan^3 \theta \\ & + (a_{01}^1 - 6a_{10}^0) \tan^2 \theta - (a_{01}^0 + a_{10}^1) \tan \theta + a_{10}^0 = 0, \quad \tan \theta = t \end{aligned}$$

tomando a_{01}^0 , uma rotação $\theta = \frac{\pi}{2}$ é suficiente para obtermos a equação

$$(\overline{a_{01}^0} y) (dx^4 - 6dx^2 dy^2 + dy^4) + (\overline{a_{10}^1} x + \overline{a_{01}^1} y) (dx^2 - dy^2) dx dy = 0.$$

□

Proposição 10. *Seja \mathbf{p} um ponto axiumbílico. Então existe uma carta de Monge e uma homotetia em \mathbb{R}^4 , tal que a equação das linhas axiais é dada por*

$$y(dx^4 - 6dx^2 dy^2 + dy^4) + (ax + by)(dx^2 - dy^2) dx dy + H(x, y, dx, dy) = 0, \quad (1.4.10)$$

onde H contém termos de ordem maior ou igual a 2 em (x, y) . Além disso, o ponto axiumbílico \mathbf{p} é transversal se, e somente se, $a \neq 0$.

Demonstração. Considere a parametrização

$$X(x, y) = (x, y, R(x, y), S(x, y)),$$

dada pelas equações 1.4.1 e 1.4.2 tal que $(0, 0)$ é um ponto axiumbílico. Pela equação 1.4.7 segue que:

$$a_0(x, y) = \frac{1}{2}(r\alpha_1 + s\alpha_2)x + \frac{1}{2}(r\alpha_3 + s\alpha_4)y + O(2)$$

$$a_1(x, y) = 2(s\alpha_1 - r\alpha_2)x + 2(s\alpha_3 - r\alpha_4)y + O(2).$$

Por uma escolha apropriada de uma rotação no plano $\{x, y\}$, dada pelo 4 e uma homotetia em \mathbb{R}^4 , é possível fazer $2a_{10} = r\alpha_1 + s\alpha_2 = 0$ e então

$$(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)(r^2 + s^2) \neq 0,$$

também $a_{01} = \frac{1}{2}(r\alpha_3 + s\alpha_4) = 1$. Dividindo 1.4.10 por $\frac{r\alpha_3 + s\alpha_4}{2}$, temos o resultado estabelecido

$$a = \frac{4(s\alpha_1 - r\alpha_2)}{r\alpha_3 + s\alpha_4}$$

quando $r\alpha_1 + s\alpha_2 = 0$ e

$$b = \frac{4(s\alpha_3 - r\alpha_4)}{r\alpha_3 + s\alpha_4}.$$

Se $r \neq 0$, segue que

$$a = -\frac{4(r^2 + s^2)\alpha_3}{r(r\alpha_3 + s\alpha_4)}.$$

Se $s \neq 0$ e $r = 0$, segue que

$$a = \frac{4\alpha_1}{\alpha_4}.$$

□

Observação 7. Seja $p = \frac{dy}{dx}$. Então a equação diferencial 1.4.10 é dada por

$$y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1 - p^2) + H(x, y, p) = 0, \quad (1.4.11)$$

onde H contém termos de ordem maior ou igual a 2 em (x, y) .

Capítulo 2

Configurações Axiais de superfícies imersas em \mathbb{R}^4

No trabalho *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, para estudar a equação

$$F(t, x, p) = 0, \quad p = \frac{dx}{dt}, \quad t, x \in \mathbb{R} \quad (2.0.1)$$

Poincaré usou uma brilhante e efetiva construção geométrica, que permitiu-lhe criar uma teoria qualitativa de tal equação diferencial dos trabalhos anteriores de Lagrange, Cauchy, Briot, Bouquet e outros. O método que Poincaré utilizou foi o levantamento de uma equação diferencial para a superfície

$$F(t, x, p) = 0$$

no espaço de 1-jato de funções $x(t)$, ou seja, o espaço tridimensional com coordenada (t, x, p) . Isto permite-lhe passar do campo vetorial de várias direções, dado pela equação 2.0.1 no plano (t, x) para um campo vetorial de uma única direção sobre uma superfície.

Poincaré considerou o caso onde a superfície $F(t, x, p) = 0$ não tem infinitos buracos e as soluções da equação 2.0.1 tratam de trajetórias e movimentos ao longo desta superfície dado pelo campo vetorial

$$t' = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad x' = p \frac{\partial F}{\partial p}, \quad p' = - \left(\frac{\partial F}{\partial t} + p \frac{\partial F}{\partial x} \right),$$

que é chamado *levantamento*. Esta construção permitiu a Poincaré estudar as curvas integrais de 2.0.1, também os assim chamados *pontos singulares* e que esta equação não pode ser resolvida com relação a derivada. Além disso, este fato levou Poincaré ao problema de distribuição de pontos singulares de um campo vetorial em uma superfície compacta orientável e para um notável resultado topológico:

Se um campo vetorial em uma superfície compacta orientável têm somente pontos singulares não-degenerados (nós- n , selas- s e focos- f), então a soma $n + f - s$ para todo o campo é o mesma e é igual a característica de Euler desta superfície.

Neste trabalho usamos este campo vetorial descrito acima, com o nome de campo vetorial de Lie-Cartan que é de grande importância para encontrarmos os pontos axiumbólicos.

Definição 5 (Fibrado Projetivo). *A cada $\mathfrak{p} \in M$ está associado o círculo unitário $S^1_{\mathfrak{p}} \subset T_{\mathfrak{p}}M$. Seja o vetor $v, -v \in S^1_{\mathfrak{p}}$, tal que*

$$[v] = \{v, -v\}.$$

Fazendo o quociente

$$S_{\mathfrak{p}}^1/[v],$$

temos o espaço projetivo $P_{\mathfrak{p}}M$. Seja v o representante da classe, então temos

$$PM := \{(\mathfrak{p}, v) : \mathfrak{p} \in M, v \in P_{\mathfrak{p}}M\},$$

dito o **fibrado projetivo**, denotado por (PM, M, π) , onde π é uma projeção com estrutura de variedade, dada por

$$\pi(\mathfrak{p}, v) = \mathfrak{p}$$

Para cada aberto $U \subset M$, estão definidas as cartas

$$\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad e \quad \left(x, y, \frac{dx}{dy}\right),$$

sendo $p = \frac{dy}{dx}$ e $q = \frac{dx}{dy}$, que cobrem $\pi^{-1}(U)$.

Seja $\mathcal{I}^r = \mathcal{I}^r(M, \mathbb{R}^4)$ o conjunto de imersões de classe C^r . Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, a equação diferencial das linhas axiais estão bem definidas

$$\mathcal{G}(x, y, dx, dy) = a_4 dy^4 + a_3 dy^3 dx + a_2 dy^2 dx^2 + a_1 dy dx^3 + a_0 dx^4 = 0 \quad (2.0.2)$$

no fibrado projetivo PM de M .

Definição 6. Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, seja a superfície de Lie-Cartan da imersão α , de classe C^{r-2} , dada por

$$\mathbb{L}_{\alpha} := \mathcal{G}^{-1}(0),$$

tal superfície é regular em $M - \mathcal{U}_{\alpha}$, podendo apresentar singularidades em \mathcal{U}_{α} .

Teorema 2. Seja o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k , $k \geq 1$. Se $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ é um valor regular de f , então teremos que $f^{-1}(c)$ é vazio ou é uma superfície m -dimensional de classe C^k em \mathbb{R}^n .

Demonstração. Ver [14]. □

Proposição 11. $\mathbb{L}_{\alpha} := \mathcal{G}^{-1}(0)$ é uma superfície regular na vizinhança do eixo projetivo p .

Demonstração. Usando a carta de Monge, temos

$$y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1 - p^2) + H(x, y, p) = 0.$$

Calculando as derivadas, temos

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, y, p) = ap(1 - p^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(x, y, p) = p^4 - 6p^2 + 1 + bp(1 - p^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p}(x, y, p) = y.(4p^3 - 12p) + (ax + by)(1 - 3p^2),$$

no ponto $(0, 0, p)$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(0,0,p) = ap(1-p^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(0,0,p) = p^4 - 6p^2 + 1 + bp(1-p^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p}(0,0,p) = 0.$$

Temos ainda que as equações

$$ap(1-p^2) = 0 \text{ e } p^4 - 6p^2 + 1 + bp(1-p^2) = 0,$$

não têm solução comum. De fato isso ocorre pois a primeira equação têm como solução $p = 0$ ou $p = \pm 1$, que não é solução da 2ª equação acima. \square

Além disso, a equação diferencial quártica 2.0.2 contém a linha projetiva em \mathcal{U}_α , de fato temos que

$$\mathcal{G}(x,y,p) = y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1-p^2) + H(x,y,p)$$

$$\mathcal{G}(0,0,p) = 0.(p^4 - 6p^2 + 1) + (a.0 + b.0)p(1-p^2) + H(0,0,p)$$

$$\mathcal{G}(0,0,p) = 0,$$

onde $H(0,0,p) = 0$.

Segue que \mathbb{L}_α é uma cobertura ramificada de grau 4 em $M - \mathcal{U}_\alpha$ e contém a linha projetiva $\pi^{-1}(p)$ para cada $p \in \mathcal{U}_\alpha$.

Na carta (x,y,p) , com $p = \frac{dy}{dx}$, a equação 2.0.2 é dada por

$$\mathcal{G}(x,y,p) = a_4p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0 \quad (2.0.3)$$

Teorema 3. *O campo vetorial*

$$X_G = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial p},$$

onde

$$X_1 = \mathcal{G}_p$$

$$X_2 = p\mathcal{G}_p$$

$$X_3 = -(\mathcal{G}_x + p\mathcal{G}_y)$$

é de classe C^{k-3} , tangente à superfície $\mathcal{G}(x,y,p) = 0$. Este campo vetorial é dito campo vetorial de Lie-Cartan.

Demonstração. Seja

$$\begin{cases} x' = X_1 \\ y' = X_2 \\ p' = X_3 \end{cases},$$

como $p = \frac{dy}{dx}$.

Façamos $x = t$, então $dx = dt$, assim

$$p = \frac{dy}{dt} \implies dy = p dt \implies y' = p,$$

dessa forma teremos

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = p \\ p' = X_3 \end{cases},$$

temos

$$X = (X_1, X_2, X_3) \text{ e } \nabla \mathcal{G} = (\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_y, \mathcal{G}_p)$$

e $\langle X, \nabla \mathcal{G} \rangle = 0$ então, teremos

$$X_1 \cdot \mathcal{G}_x + X_2 \cdot \mathcal{G}_y + X_3 \cdot \mathcal{G}_p = 0$$

$$1 \cdot \mathcal{G}_x + p \cdot \mathcal{G}_y + X_3 \cdot \mathcal{G}_p = 0$$

$$X_3 = \frac{-\mathcal{G}_x - p \cdot \mathcal{G}_y}{\mathcal{G}_p}.$$

Portanto

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} - \frac{(\mathcal{G}_x + p \mathcal{G}_y)}{\mathcal{G}_p} \frac{\partial}{\partial p},$$

multiplicando a equação acima por \mathcal{G}_p , teremos

$$X_\alpha = \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial x} + p \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial y} - (\mathcal{G}_x + p \mathcal{G}_y) \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.0.4)$$

□

As linhas de curvatura axial, são as projeções dadas por

$$\pi : PM \longrightarrow M,$$

restrita para \mathbb{L}_α das curvas integrais de X_α .

Para cada $p \in M - \mathcal{U}_\alpha$, existem 4 direções axiais bem definidas, dadas por quatro raízes da equação 2.0.3.

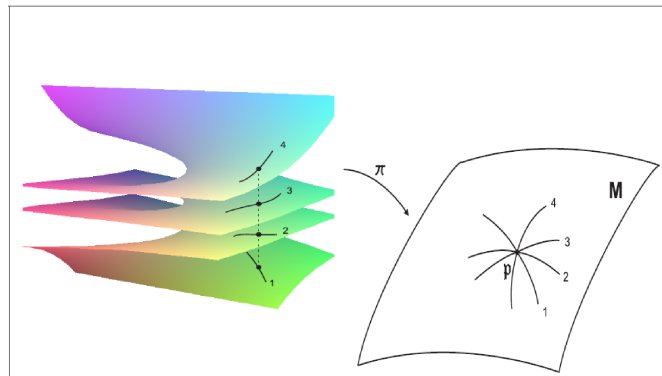


Figura 2.1: Projeção em M^2 das curvas integrais do campo vetorial de Lie-Cartan

Na Figura 3.1, podemos ver a projeção em M das curvas integrais do campo vetorial tangente de Lie-Cartan, para \mathbb{L}_α em uma vizinhança de $\mathbf{p} \in M - \mathcal{U}_\alpha$. Para cada ponto $\mathbf{p} \in M$ passam quatro linhas, associadas em pares aos eixos da elipse.

Definição 7. Para o conjunto dos pontos axiumbólicos em M e as linhas axiais, podemos definir:

1. **Configuração axial principal** $\mathcal{P}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha\}$

é definida pelos pontos axiumbólicos em \mathcal{U}_α e pela rede \mathcal{X}_α (relacionada com as cruces da curvatura axial principal) em $M - \mathcal{U}_\alpha$.

2. **Configuração axial média** $\mathcal{Q}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha\}$

é definida pelos pontos axiumbólicos em \mathcal{U}_α e pela rede \mathcal{Y}_α (relacionada com as cruces da curvatura axial média) em $M - \mathcal{U}_\alpha$.

2.1 Configurações Axiais na vizinhança de pontos axiumbólicos

Seja \mathbf{p} um ponto axiumbólico, cuja vizinhança é parametrizada por uma carta de Monge. Seguindo a notação estabelecida no capítulo 1. Se \mathbf{p} for um ponto axiumbólico transversal, ou seja, determinado pela interseção transversal das curvas $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ (ver equação 1.3.1), resulta da Proposição 10 e Observação 7, que a equação diferencial das linhas axiais é dada por

$$\mathcal{G}(x, y, p) = y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1 - p^2) + H(x, y, p) = 0, \quad (2.1.1)$$

onde $H(x, y, p)$ contém termos de ordem maior ou igual a 2 em (x, y) .

A superfície de Lie-Cartan \mathbb{L}_α em PM é definida, implicitamente por

$$\mathcal{G}(x, y, p) = 0. \quad (2.1.2)$$

No caso em que \mathbf{p} é um ponto axiumbólico transversal, a superfície definida em 2.1.2 é regular e de classe C^{r-2} na vizinhança do eixo projetivo p .

Nas coordenadas (x, y, p) , o campo vetorial de Lie-Cartan X , é de classe C^{r-3} (equação 2.0.4), dado por

$$X = \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial x} + p \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial y} - (\mathcal{G}_x + p \mathcal{G}_y) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (2.1.3)$$

As projeções das curvas integrais de $X|_{\mathcal{G}=0}$ são as linhas axiais na vizinhança de \mathbf{p} (Figura 3.1).

Calculando $\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_y$ e \mathcal{G}_p , teremos

$$\mathcal{G}_x = ap(1 - p^2)$$

$$\mathcal{G}_y = (p^4 - 6p^2 + 1) + bp(1 - p^2)$$

$$\mathcal{G}_p = y(4p^3 - 12p) + (ax + by)(1 - 3p^2).$$

Assim, o campo vetorial de Lie-Cartan pode ser escrito como

$$\begin{aligned} X &= [y(4p^3 - 12p) + (ax + by)(1 - 3p^2)] \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ p[y(4p^3 - 12p) + (ax + by)(1 - 3p^2)] \frac{\partial}{\partial y} \\ &- [(ap(1 - p^2) + p(p^4 - 6p^2 + 1) + bp(1 - p^2))] \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned}$$

Restrito ao eixo projetivo p , o campo vetorial de Lie-Cartan é dado por

$$X = -p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] \frac{\partial}{\partial p}. \quad (2.1.4)$$

Portanto os pontos singulares do campo vetorial de Lie-Cartan, na linha projetiva são dados pela equação:

$$P(p) = pR(p) = p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] = 0. \quad (2.1.5)$$

O discriminante (ver [13], pag. 16) de $R(p) = (p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)$, é dado por

$$\begin{aligned} \Delta(a, b) &= 16a^5 + 4(b^2 + 68)a^4 + 16(b^2 + 144)a^3 \\ &\quad - 8(b^2 - 80)(16 + b^2)a^2 + 96(16 + b^2)a + 4(16 + b^2)^3. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

A configuração axial próxima ao ponto axiumbílico, será estabelecida da seguinte forma:

- i) $\Delta(a, b) < 0$,
- ii) $\Delta(a, b) > 0$, $a < 0$, $a \neq -1$,
- iii) $\Delta(a, b) > 0$, $a > 0$.

Além disso, $R(\pm 1) = -4$, $R(0) = 1 + a$, de fato

$$R(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 1 + (1 - 1^2)(a + b) = -4$$

$$R(1) = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^2 + 1 + (1 - (-1)^2)(a + b) = -4$$

$$R(0) = 1 + (1 + 0)(a + 0) = 1 + a.$$

Temos, também que

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} R(p) = +\infty,$$

assim R têm duas raízes reais simples, uma menor que -1 e a outra maior que 1 .

A derivada de X em $(0, 0, p)$ é dada por

$$DX(0, 0, p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x}(0, 0, p) & \frac{\partial X_1}{\partial y}(0, 0, p) & \frac{\partial X_1}{\partial p}(0, 0, p) \\ \frac{\partial X_2}{\partial x}(0, 0, p) & \frac{\partial X_2}{\partial y}(0, 0, p) & \frac{\partial X_2}{\partial p}(0, 0, p) \\ \frac{\partial X_3}{\partial x}(0, 0, p) & \frac{\partial X_3}{\partial y}(0, 0, p) & \frac{\partial X_3}{\partial p}(0, 0, p) \end{bmatrix},$$

onde

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial p}.$$

Assim, teremos

$$DX(0, 0, p) = \begin{bmatrix} a(1 - 3p^2) & 4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p & 0 \\ ap(1 - 3p^2) & p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p] & 0 \\ 0 & 0 & -P'(p) \end{bmatrix}.$$

Calculando os autovalores, teremos

$$(\lambda I_3 - DX(0, 0, p)) = \begin{bmatrix} \lambda - a(1 - 3p^2) & -[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p] & 0 \\ -ap(1 - 3p^2) & \lambda - [p(4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p)] & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + P'(p) \end{bmatrix},$$

onde I_3 é a matriz identidade 3×3 .

Fazendo

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_3 - DX(0, 0, p)) &= (\lambda - a(1 - 3p^2))(\lambda - [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]])(\lambda + P'(p)) \\
&- (\lambda + P'(p))(pa(1 - 3p^2))([4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]) \\
&= (\lambda + P'(p))[(\lambda - a(1 - 3p^2))(\lambda - [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]]) \\
&- (pa(1 - 3p^2))([4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p])].
\end{aligned}$$

Como $\det(\lambda I_3 - DX(0, 0, p)) = 0$, temos

$$(\lambda + P'(p))[(\lambda - a(1 - 3p^2))(\lambda - [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]]) - (pa(1 - 3p^2))([4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p])] = 0,$$

assim

$$\lambda_3 + P'(p) = 0 \implies \lambda_3 = -P'(p)$$

ou

$$\begin{aligned}
&(\lambda - a(1 - 3p^2))(\lambda - [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]]) - \\
&(pa(1 - 3p^2))([4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]) &= 0 \\
&\lambda^2 - \lambda[a(1 - 3p^2) + [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]]] &+ \\
&a(1 - 3p^2)[p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]] &- \\
&(pa(1 - 3p^2))([4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]) &= \\
&\lambda^2 - \lambda[a(1 - 3p^2) + [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]]] &= \\
&\lambda(\lambda - [a(1 - 3p^2) + [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]]]) &= 0,
\end{aligned}$$

assim

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = a(1 - 3p^2) + [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]].$$

Lembre-se que $P(p) = pR(p)$, e então

$$P'(p) = R(p) + pR'(p).$$

Portanto nas raízes de R , segue que $-P'(p) = -pR'(p)$. Também, como ± 1 não são raízes de R , segue que

$$R(p) = (p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)$$

$$(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp) = 0$$

$$\begin{aligned}
a + bp &= \frac{-(p^4 - 6p^2 + 1)}{(1 - p^2)} \\
a &= \frac{(-p^4 + 6p^2 - 1) - bp(1 - p^2)}{1 - p^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação acima a expressão de $\lambda_2(p)$, p sendo uma raiz de $R(p)$ (ponto singular de X), segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= a(1 - 3p^2) + [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]] \\
&= \frac{(-p^4 + 6p^2 - 1) - bp(1 - p^2)}{1 - p^2}(1 - 3p^2) \\
&+ [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]] \\
&= \frac{(-p^4 + 6p^2 - 1)(1 - 3p^2) - bp(1 - p^2)(1 - 3p^2)}{1 - p^2} \\
&+ \frac{[p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]](1 - p^2)}{1 - p^2} \\
&= \frac{-p^4 + 3p^6 + 6p^2 - 18p^4 - 1 + 3p^2 - bp(1 - p^2)(1 - 3p^2)}{1 - p^2} \\
&+ \frac{4p^4(1 - p^2) - 12p^2(1 - p^2) + bp(1 - 3p^2)(1 - p^2)}{1 - p^2} \\
&= \frac{-p^6 - 3p^4 - 3p^2 - 1}{1 - p^2} = \frac{p^6 + 3p^4 + 3p^2 + 1}{p^2 - 1} \\
&= \frac{(p^2 + 1)^3}{p^2 - 1} \\
&\quad \begin{cases} \lambda_1(p) &= \frac{(p^2 + 1)^3}{p^2 - 1} \\ \lambda_2(p) &= -pR'(p) \end{cases}
\end{aligned}$$

Vamos separar os autovalores em dois casos:

a) $p_0 = 0$

Teremos,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(p_0) &= a(1 - 3p^2) + [p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p]] \\
\lambda_1(p_0) &= a \\
\lambda_2(p_0) &= -P'(p) \\
\lambda_2(p_0) &= -R(p) - pR'(p) = -(a + 1).
\end{aligned}$$

b) $p_i \neq 0$ com $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(p_i) &= \frac{(p_i^2 + 1)^3}{(p_i^2 - 1)} \\
\lambda_2(p_i) &= -p_i R'(p_i).
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores de DX , no espaço tangente para $\mathcal{G} = 0$, são os seguintes:

$$p_0 = 0 : \quad \begin{cases} \lambda_1 &= a \\ \lambda_2 &= -(a + 1) \end{cases} \quad (2.1.7)$$

$$p_i \neq 0 : \quad \begin{cases} \lambda_1 &= \frac{(p_i^2 + 1)^3}{(p_i^2 - 1)} \\ \lambda_2 &= -p_i R'(p_i) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

O autoespaço associado ao autovalor λ_1 é transversal ao eixo p e o autovalor λ_2 tem o eixo projetivo como seu autoespaço.

2.2 O ponto axiumbílico E_3

Quando $\Delta(a, b) < 0$, R têm duas raízes reais simples, e o campo vetorial de Lie-Cartan têm três selas hiperbólicas no eixo projetivo, este ponto axiumbílico é chamado do tipo E_3 .

De fato fazendo a análise do gráfico de R , temos

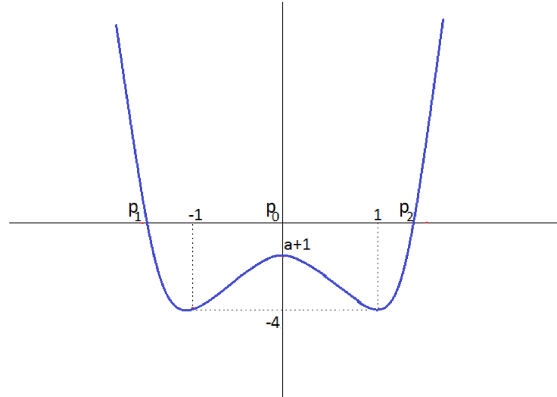


Figura 2.2: Gráfico de $R(p)$ no caso E_3

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $p_2 > 1$

Temos que $p_2 > 1$ implica $p_2^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_2)$, então $R'(p_2) > 0$, como $-p_2 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) < 0$$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

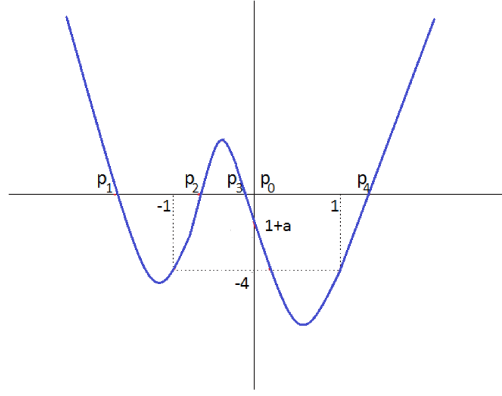


Figura 2.3: Gráfico de $R(p)$ no caso E_4 , ítem 1.

2.3 O ponto axiumbílico E_4

Quando $\Delta(a, b) > 0$, $a < 0$, $a \neq -1$, R têm quatro raízes reais simples, e o campo vetorial de Lie-Cartan têm 5 pontos singulares na linha projetiva, quatro são selas hiperbólicas e uma é um nó hiperbólico, este ponto axiumbílico é chamado do tipo E_4 .

De fato fazendo a análise do gráfico de R , temos

1. $p_1 < -1 < p_2 < p_3 < p_0 = 0 < 1 < p_4$.

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

- a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

- b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

- c) $-1 < p_2 < 0$

Seja $p_2 = -\frac{\eta}{\varsigma}$, com $\eta < \varsigma$, assim

$$\frac{\left(-\frac{\eta}{\varsigma}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{\eta}{\varsigma}\right)^2 - 1} = \frac{\eta^2 + \varsigma^2}{\varsigma^2(\eta^2 - \varsigma^2)} < 0$$

pois $\eta^2 - \varsigma^2 < 0$, dessa forma

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_2)$, então $R'(p_2) > 0$, como $-p_2 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) > 0$$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

d) $-1 < p_3 < 0$

A análise de λ_1 segue igual a do item c), assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_3^2 + 1)^3}{(p_3^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_3)$, então $R'(p_3) < 0$, como $-p_3 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_3 R'(p_3) < 0$$

Portanto p_3 é um *nó*.

e) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

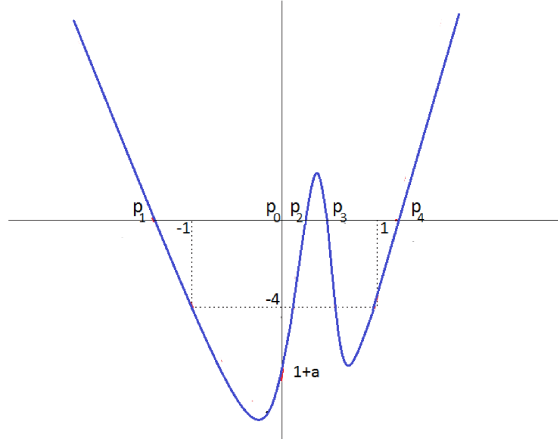


Figura 2.4: Gráfico de $R(p)$ no caso E_4 , item 2.

2. $p_1 < -1 < p_0 = 0 < p_2 < p_3 < 1 < p_4$

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $0 < p_2 < 1$

Seja $p_2 = \frac{\eta}{\varsigma}$, com $\eta < \varsigma$, assim

$$\frac{\left(\frac{\eta}{\varsigma}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\eta}{\varsigma}\right)^2 - 1} = \frac{\eta^2 + \varsigma^2}{\varsigma^2(\eta^2 - \varsigma^2)} < 0$$

pois $\eta^2 - \varsigma^2 < 0$, dessa forma

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_2)$, então $R'(p_2) > 0$, como $-p_2 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) < 0$$

Portanto p_2 é um *nó*.

d) $0 < p_3 < 1$

A análise de λ_1 segue igual a do item c), assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_3^2 + 1)^3}{(p_3^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_3)$, então $R'(p_3) < 0$, como $-p_3 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_3 R'(p_3) > 0$$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

e) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

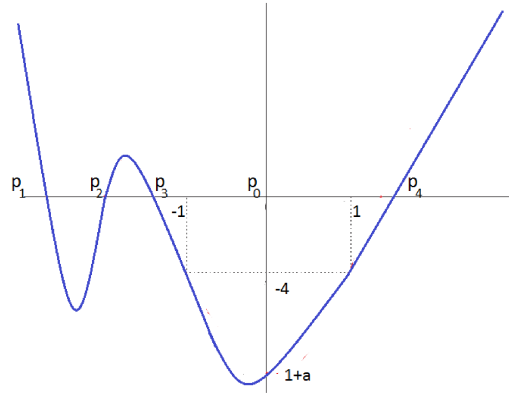


Figura 2.5: Gráfico de $R(p)$ no caso E_4 , item 3.

3. $p_1 < p_2 < p_3 < -1 < p_0 = 0 < 1 < p_4$

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $p_2 < -1$

Temos que $p_2 < -1$ implica $p_2^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_2)$, então $R'(p_2) > 0$, como $-p_2 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) > 0$$

Portanto p_2 é um *nó*.

d) $p_3 < -1$

A análise de λ_1 segue igual a do item c), assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_3^2 + 1)^3}{(p_3^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_3)$, então $R'(p_3) < 0$, como $-p_3 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_3 R'(p_3) < 0$$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

e) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

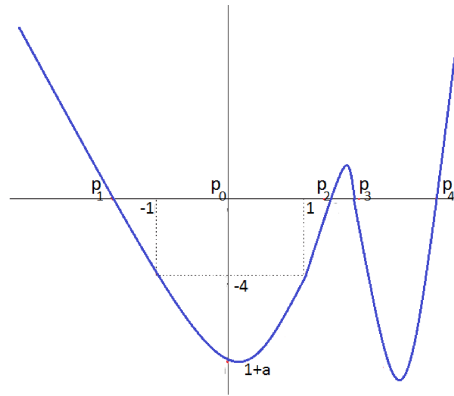


Figura 2.6: Gráfico de $R(p)$ no caso E_4 , item 4.

4. $p_1 < -1 < p_0 = 0 < 1 < p_2 < p_3 < p_4$

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $p_2 > 1$

Temos que $p_2 > 1$ implica $p_2^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_2)$, então $R'(p_2) > 0$, como $-p_2 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) < 0$$

Portanto p_2 é um *sela*.

d) $p_3 > 1$

A análise de λ_1 segue igual a do item c), assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_3^2 + 1)^3}{(p_3^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_3)$, então $R'(p_3) < 0$, como $-p_3 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_3 R'(p_3) > 0$$

Portanto p_3 é um *nó*.

e) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

5. $-1 < a < 0$

Temos

$$0 < R(0) = 1 + a < 1 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

Para a análise de λ_2 , façamos $a = \frac{\eta}{\sigma}$ com $\eta < \sigma$, assim

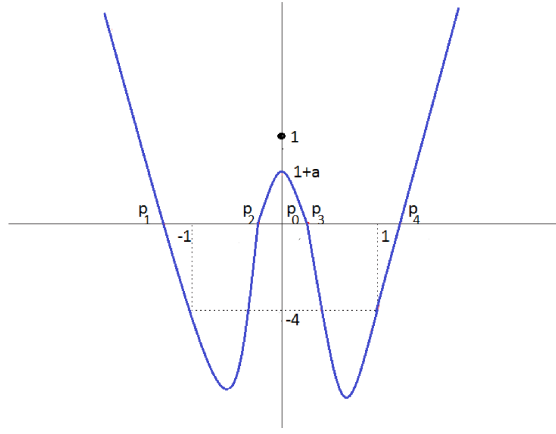


Figura 2.7: Gráfico de $R(p)$ no caso E_4 , item 5.

$$- \left[\left(-\frac{\eta}{\sigma} \right) + 1 \right] = - \left[-\frac{\eta + \sigma}{\sigma} \right] < 0$$

dessa forma

$$\lambda_2 = -(a + 1) < 0$$

Portanto p_0 é um *nó*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que $\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $-1 < p_2 < 0$

Seja $p_2 = -\frac{\eta}{\varsigma}$, com $\eta < \varsigma$, assim a análise segue como no item c) no caso 1.

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_2)$, então $R'(p_2) > 0$, como $-p_2 > 0$, temos que $\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) > 0$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

d) $0 < p_3 < 1$

A análise de λ_1 segue igual a do item c) do caso 1, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_3^2 + 1)^3}{(p_3^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_3)$, então $R'(p_3) < 0$, como $-p_3 < 0$, temos que $\lambda_2 = -p_3 R'(p_3) > 0$

Portanto p_3 é um *ponto de sela*.

e) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que $\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

2.4 O ponto axiumbílico E_5

Quando $\Delta(a, b) > 0$, $a > 0$, o campo vetorial de Lie-Cartan têm cinco selas hiperbólicas na linha projetiva, este ponto axiumbílico é chamado do tipo E_5 . Teremos,

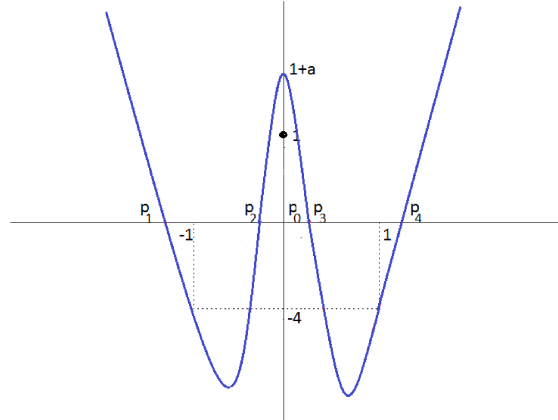


Figura 2.8: Gráfico de $R(p)$ no caso E_5

$$R(0) = 1 + a > 1 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a > 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) < 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $-1 < p_2 < 0$

Seja $p_2 = -\frac{\eta}{\varsigma}$, com $\eta < \varsigma$, assim a análise segue como no item c) no caso 1.

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_2)$, então $R'(p_2) > 0$, como $-p_2 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) > 0$$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

d) $0 < p_3 < 1$

A análise de λ_1 segue igual a do item c) do caso 1, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_3^2 + 1)^3}{(p_3^2 - 1)} < 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_3)$, então $R'(p_3) < 0$, como $-p_3 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_3 R'(p_3) > 0$$

Portanto p_3 é um *ponto de sela*.

e) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

Nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10 a superfície de Lie-Cartan e as curvas integrais do campo vetorial de Lie-Cartan são esboçadas em três casos E_3 , E_4 e E_5 , respectivamente.

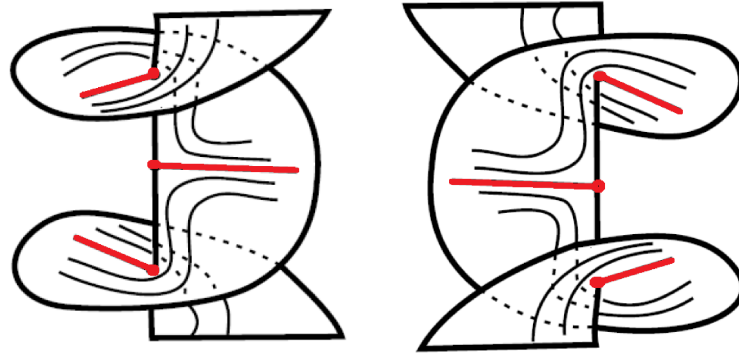


Figura 2.9: Curvas integrais no campo vetorial de Lie-Cartan no caso E_3 , [4], pag. 14, 2014

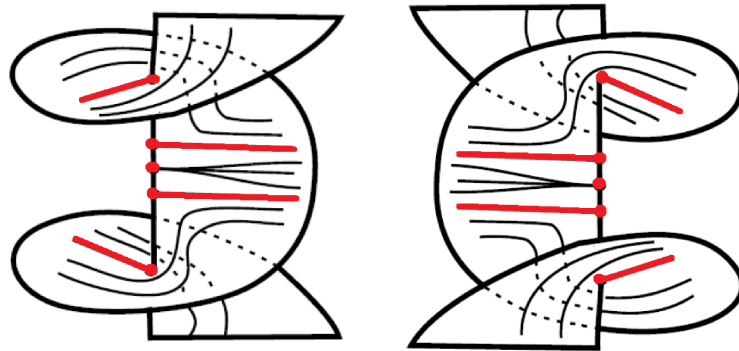


Figura 2.10: Curvas integrais no campo vetorial de Lie-Cartan no caso E_4 , [4], pag. 14, 2014

As projeções das curvas integrais

$$\pi : PM \longrightarrow M$$

são as linhas axiais próximo aos pontos axiumbólicos (veja as Figuras 4.11, 4.12, e 4.13) E_3 , E_4 e E_5 .

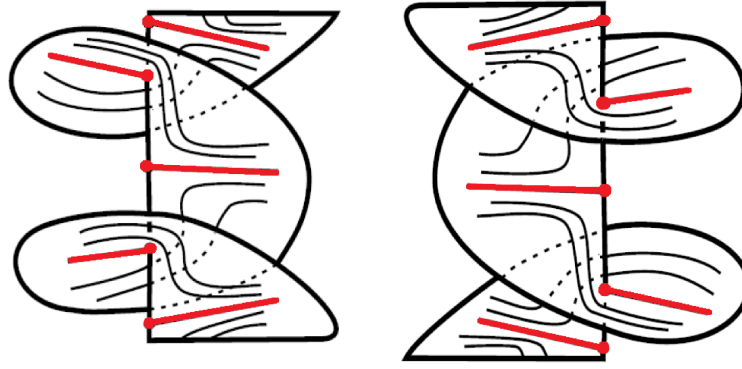


Figura 2.11: Curvas integrais no campo vetorial de Lie-Cartan no caso $E_5, [4]$, pag. 14, 2014

Para uma imersão α de uma superfície M em \mathbb{R}^4 , as singularidades \mathcal{U}_α e as linhas de curvatura axial são montadas em duas configurações axiais:

A configuração axial principal

$$\mathcal{P}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha\}$$

e a configuração axial média

$$\mathcal{Q}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha\}$$

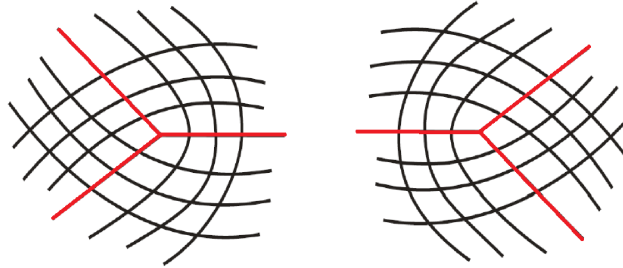


Figura 2.12: Configurações axiais próximo ao ponto axiumbílico $E_3, [4]$, pag. 14, 2014

Uma imersão $\alpha \in \mathcal{I}^r$ é dita ser uma Estabilidade Axial Principal se têm uma vizinhança $\mathcal{V}(\alpha)$ de classe C^r tal que, para todo $\beta \in \mathcal{V}(\alpha)$ existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ aplicando \mathcal{U}_α em \mathcal{U}_β e aplicando a rede integral de \mathcal{X}_α na rede de \mathcal{X}_β . Analogamente, a definição é dada para a Estabilidade Axial Média.

Na Proposição 12 são descritos os pontos axiumbílicos, que são axiais estáveis. Na Figura 4.14 são esboçadas as curvas

$$\Delta(a, b) = 0, \quad a = -1 \quad e \quad a = 0$$

no plano a, b que limita as regiões abertas correspondentes aos três tipos de pontos axiumbílicos do tipo estável axial.

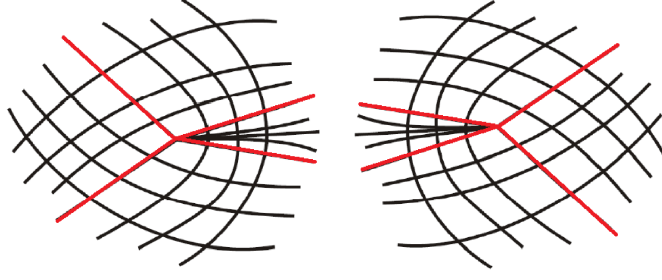


Figura 2.13: Configurações axiais próximo ao ponto axiumbílico $E_4, [4]$, pag. 14, 2014

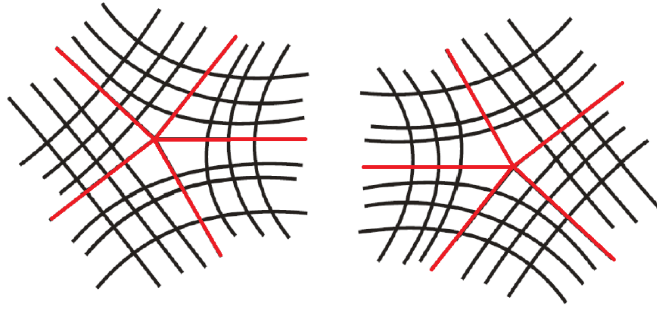


Figura 2.14: Configurações axiais próximo ao ponto axiumbílico $E_5, [4]$, pag. 14, 2014

Proposição 12. *Seja \mathbf{p} um ponto axiumbílico de $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 5$. Então, α é localmente principal axial estável e localmente médio axial estável em \mathbf{p} se, e somente se, \mathbf{p} é do tipo E_3 , E_4 e E_5 .*

A curva $\Delta(a, b) = 0$ têm três componentes conexas, e está contida na região $a \leq -1$ e é regular fora dos pontos

$$\left(-\frac{27}{2}, \pm \frac{5\sqrt{5}}{2} \right),$$

que são do tipo cúspide.

Demonstração. A função $\Delta(a, b)$ definida na equação 2.1.6 é simétrica em b . Os polinômios

$$\Delta(a, b) = 16a^5 + 4(b^2 + 68)a^4 + 16(b^2 + 144)a^3 - 8(b^2 - 80)(16 + b^2)a^2 + 96(16 + b^2)a + 4(16 + b^2)^3$$

$$\frac{\partial \Delta(a, b)}{\partial b} = 6144ba + 6144b + 768b^3 + 24b^5 + 1024ba^2 + 384ab^3 + 32a^3b - 32b^3a^2 + 8a^4b$$

na variável b , têm como resultante

$$\text{Res} \left(\Delta(a, b), \frac{\partial \Delta(a, b)}{\partial b} \right) = 274877906944(1 + a)(a^2 + 8a + 32)^2 a^1 6(2a + 27)^6.$$

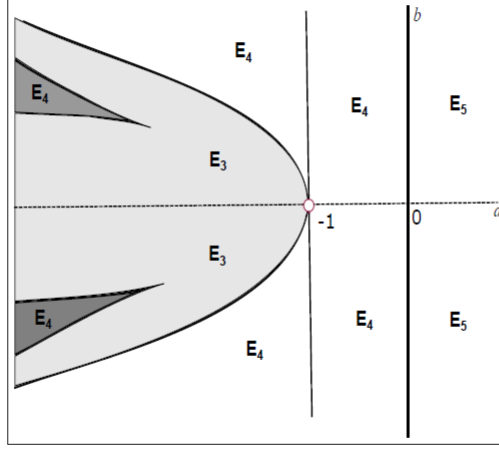


Figura 2.15: Diagrama de pontos axiombólicos estáveis. E_3 , E_4 e E_5 , [4], pag. ,2014

Os pontos críticos de Δ , são

$$\left(-\frac{27}{2}, \pm \frac{5\sqrt{5}}{2}\right),$$

que estão contidos em $\Delta(a, b) = 0$, de fato

$$\Delta\left(-\frac{27}{2}, -\frac{5\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

$$\Delta\left(-\frac{27}{2}, \frac{5\sqrt{5}}{2}\right) = 0.$$

Os pontos críticos de Δ são pontos cuspidais de Whitney. De fato, nas proximidades dos pontos críticos

$$\left(-\frac{27}{2}, \frac{5\sqrt{5}}{2}\right),$$

teremos

$$\Delta(a, b) = -54675 \left(a + \frac{27}{2}\right)^2 - 273375 \left(b - \frac{5}{2}\sqrt{5}\right)^2 - 109350\sqrt{5} \left(a + \frac{27}{2}\right) \cdot \left(b - \frac{5}{2}\sqrt{5}\right) - 19370\sqrt{5} \left(b - \frac{5}{2}\sqrt{5}\right)^3 + 10526 \left(a + \frac{27}{2}\right)^3 + 17130 \left(a + \frac{27}{2}\right) \cdot \left(b - \frac{5}{2}\sqrt{5}\right)^2 + 18690\sqrt{5} \left(a + \frac{27}{2}\right)^2 \cdot \left(b - \frac{5}{2}\sqrt{5}\right) + h.o.t.$$

A curva $\Delta(a, b) = 0$ também está contida na região $a \leq -1$ e próximo de $(-1, 0)$ e é dada por

$$a = -\frac{b^2}{20} + O(3)$$

Para $a > -1$ todas as raízes de $\Delta(a, b) = 0$ são complexas.

Pela classificação de pontos axiumbílicos E_3, E_4 e E_5 pelo sinal de $\Delta(a, b) = 0$ e a , o diagrama de estabilidade de pontos axiumbílicos é mostrado na Figura 4.14. \square

2.5 O ponto axiumbílico E_{34}^1

Definição 8. *Seja $\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão de classe C^r , $r \geq 5$ de uma superfície suave e orientada. Um ponto axiumbílico \mathbf{p} é dito do tipo E_{34}^1 se na Proposição 10, $a \neq 0$, e:*

$$i) \Delta(a, b) = 0, (a, b) \neq (-1, 0) \text{ e } (a, b) \neq \left(-\frac{27}{2}, \pm \frac{5\sqrt{5}}{2}\right), \text{ ou}$$

$$ii) b \neq 0 \text{ se } a = -1.$$

Proposição 13. *Seja $\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão de classe C^r , $r \geq 5$ de uma superfície suave e orientada, tendo um ponto axiumbílico \mathbf{p} do tipo E_{34}^1 . Então a configuração axial de α na vizinhança de \mathbf{p} é como mostrado na Figura 4.21.*

Demonstração. Desde que a condição de transversalidade ($a \neq 0$), seja preservada no ponto axiumbílico do tipo E_{34}^1 a superfície implícita definida pela equação

$$\mathcal{G}(x, y, p) = 0$$

é regular na vizinhança da linha projetiva. Da hipótese, temos

$$\Delta(a, b) = 0, (a, b) \neq (-1, 0) \text{ e } (a, b) \neq \left(-\frac{27}{2}, \pm \frac{5\sqrt{5}}{2}\right)$$

ou

$$b \neq 0 \text{ se } a = -1,$$

logo, o polimônio

$$P(p) = p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] = pR(p)$$

que define as singularidades do campo vetorial de Lie-Cartan, têm uma raiz dupla e três raízes reais simples.

Analisaremos da mesma forma, que foi feito para os pontos axiumbílicos do tipo E_3, E_4 e E_5 .

$$\text{Caso 1: } \Delta(a, b) = 0, (a, b) \neq (-1, 0) \text{ e } (a, b) \neq \left(-\frac{27}{2}, \pm \frac{5\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1. p_1 < -1 < p_2 = p_3 < p_0 = 0 < 1 < p_4.$$

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \text{ e } R(\pm 1) = -4$$

$$a) p_0 = 0$$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

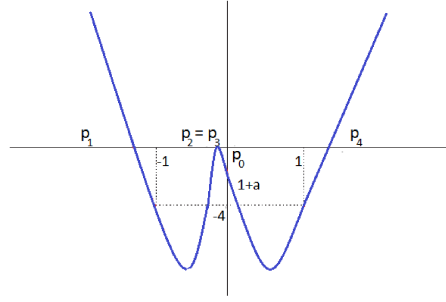


Figura 2.16: Gráfico de $R(p)$ no caso E_{34}^1 , item 1

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $-1 < p_2 < 0$

Seja $p_2 = -\frac{\eta}{\varsigma}$, com $\eta < \varsigma$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como $R(p_2)$ é um ponto de máximo, então $R'(p_2) = 0$, assim

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) = 0$$

Portanto p_2 é um *ponto sela-nó*.

d) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

2. $p_1 < -1 < p_0 = 0 < p_2 = p_3 < 1 < p_4$.

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

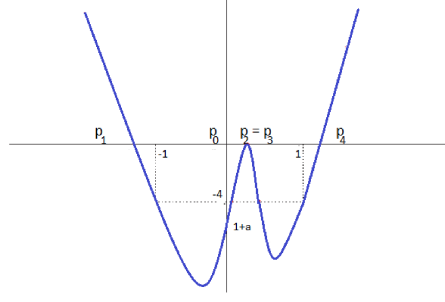


Figura 2.17: Gráfico de $R(p)$ no caso E_{34}^1 , item 2

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $0 < p_2 < 1$

A análise segue conforme o item c) acima, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como $R(p_2)$ é um ponto de máximo, então $R'(p_2) = 0$, assim

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) = 0$$

Portanto p_2 é um *ponto sela-nó*.

d) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

3. $p_1 < p_2 = p_3 < -1 < p_0 = 0 < 1 < p_4$.

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

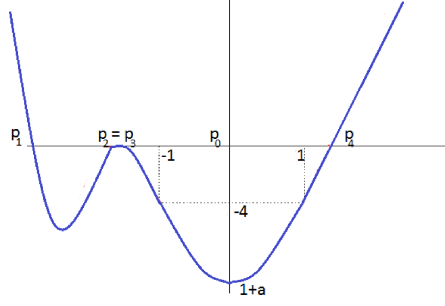


Figura 2.18: Gráfico de $R(p)$ no caso E_{34}^1 , item 3

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $p_2 < -1$

A análise segue conforme o item anterior, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} > 0$$

Como $R(p_2)$ é um ponto de máximo, então $R'(p_2) = 0$, assim

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) = 0$$

Portanto p_2 é um *ponto sela-nó*.

d) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

4. $p_1 < -1 < p_0 = 0 < 1 < p_2 = p_3 < p_4$.

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a < 0$$

$$\lambda_2 = -(a + 1) > 0$$

Portanto p_0 é um *ponto de sela*.

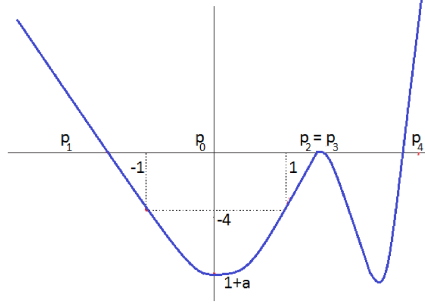


Figura 2.19: Gráfico de $R(p)$ no caso E_{34}^1 , item 4

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $p_2 > 1$

Temos que

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} > 0$$

Como $R(p_2)$ é um ponto de máximo, então $R'(p_2) = 0$, assim

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) = 0$$

Portanto p_2 é um *ponto sela-nó*.

d) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

Caso 2: $b \neq 0$ se $a = -1$

Fazendo $a = -1$ em $P(p)$, temos

$$\begin{aligned} P(p) &= p[p^4 - 6p^2 + 1 + (1 - p^2)(a + bp)] \\ &= p[p^4 - 6p^2 + 1 + (1 - p^2)(-1 + bp)] \\ &= p[p^4 - 6p^2 + 1 - 1 + bp + p^2 - bp^3] \\ &= p[p^4 - bp^3 - 5p^2 + bp] \\ &= p^2[p^3 - bp^2 - 5p + b]. \end{aligned}$$

De onde resulta que 0 é raiz dupla de $P(p)$. Abaixo analisaremos os casos possíveis:

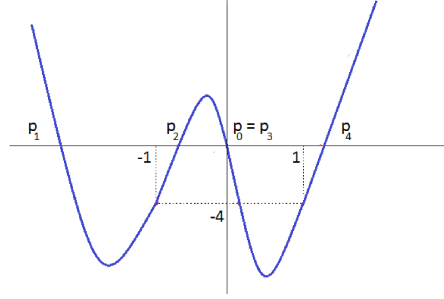


Figura 2.20: Gráfico de $R(p)$ no caso E_{34}^1 , item 5

5. $p_1 < -1 < p_2 < p_0 = p_3 = 0 < 1 < p_4$.

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a = -1 < 0$$

$$\lambda_2 = -(-1 + 1) = 0$$

Portanto p_0 é um *ponto sela-nó*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $-1 < p_2 < 0$

Temos que

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como R é crescente em P_2 temos $R(p_2) > 0$, então $R'(p_2) > 0$, assim

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) > 0$$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

d) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

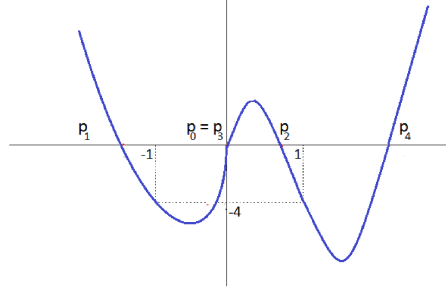


Figura 2.21: Gráfico de $R(p)$ no caso E_{34}^1 , item 6

6. $p_1 < -1 < p_0 = p_3 = 0 < p_2 < 1 < p_4$.

Temos

$$R(0) = 1 + a < 0 \quad e \quad R(\pm 1) = -4$$

a) $p_0 = 0$

$$\lambda_1 = a = -1 < 0$$

$$\lambda_2 = -(-1 + 1) = 0$$

Portanto p_0 é um *ponto sela-nó*.

b) $p_1 < -1$

Temos que $p_1 < -1$ implica $p_1^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_1^2 + 1)^3}{(p_1^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é decrescente em $R(p_1)$, então $R'(p_1) < 0$, como $-p_1 > 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_1 R'(p_1) < 0$$

Portanto p_1 é um *ponto de sela*.

c) $0 < p_2 < 1$

Temos que

$$\lambda_1 = \frac{(p_2^2 + 1)^3}{(p_2^2 - 1)} < 0$$

Como R é decrescente em p_2 temos $R(p_2) < 0$, então $R'(p_2) < 0$, assim

$$\lambda_2 = -p_2 R'(p_2) > 0$$

Portanto p_2 é um *ponto de sela*.

d) $p_4 > 1$

Temos que $p_4 > 1$ implica $p_4^2 > 0$, assim

$$\lambda_1 = \frac{(p_4^2 + 1)^3}{(p_4^2 - 1)} > 0$$

Como o gráfico é crescente em $R(p_4)$, então $R'(p_4) > 0$, como $-p_4 < 0$, temos que

$$\lambda_2 = -p_4 R'(p_4) < 0$$

Portanto p_4 é um *ponto de sela*.

Aplicando $(0, 0, 0)$ em $\mathcal{G}_y(x, y, p)$, temos

$$\mathcal{G}_y(x, y, p) = p^4 - 6p^2 + 1 + bp(1 - p^2)$$

$$\mathcal{G}_y(0, 0, 0) = 1.$$

Como $\mathcal{G}_y(0, 0, 0) = 1$, segue do Teorema da Função Ímplicita que $y(x, p) = xp + O(3)$ usando expansão de Taylor, temos

$$y(x, p) = y(0, 0) + \frac{\partial y}{\partial x}(0, 0) \cdot x + \frac{\partial y}{\partial p}(0, 0) \cdot p + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, 0) \cdot x^2 + \frac{\partial y}{\partial x \partial p}(0, 0) \cdot xp + \frac{\partial^2 y}{\partial p^2}(0, 0) \cdot p^2 + O(3),$$

onde

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}},$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}},$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, y, p) = ap(1 - p^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(x, y, p) = p^4 - 6p^2 + bp(1 - p^2) + 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(x, y, p) = y(4p^3 - 12p) + (ax + by)(1 - 3p^2),$$

aplicando no ponto $(0, 0, 0)$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(0, 0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(0, 0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}(0, 0, 0) = 0.$$

Calculando os termos da expansão de Taylor acima, temos

$$y(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{ap(1 - p^2)}{p^4 - 6p^2 + bp(1 - p^2) + 1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) (0,0) &= 0 \\
\frac{\partial y}{\partial p} &= -\frac{y(4p^3 - 12p) + (ax + by)(1 - 3p^2)}{p^4 - 6p^2 + bp(1 - p^2) + 1} = 0 \\
\frac{\partial y}{\partial p} (0,0) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right) &= -\frac{y(12p^2 - 12) + (ax + by)(-6p)}{(p^4 - 6p^2 + bp(1 - p^2) + 1)^2} \\
\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right) (0,0) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right) &= -\frac{a(1 - 3p^2)(p^4 - 6p^2 + bp(1 - p^2) + 1)}{(p^4 - 6p^2 + bp(1 - p^2) + 1)^2} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right) (0,0) &= -a,
\end{aligned}$$

como $a = -1$, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial p} \right) (0,0) = 1.$$

Portanto, temos

$$y(x, p) = 0 + 0.x + 0.p + 0.x^2 + 1.xp + 0.p^2 + O(3) = xp + O(3),$$

que está definida em uma vizinhança de $(0, 0, 0)$, tal que

$$\mathcal{G}(x, y(x, p), p) = 0.$$

Neste caso, o campo vetorial de Lie-Cartan na carta (x, p) é dado por:

$$\begin{cases} x' = \mathcal{G}_p(x, y(x, p), p) \\ p' = -(\mathcal{G}_x(x, y(x, p), p) + p\mathcal{G}_y(x, y(x, p), p)) \end{cases} ,$$

assim, teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_p(x, y(x, p), p) &= y(4p^3 - 12p) + (ax + by)(1 - 3p^2) \\
&= (xp + O(3))(4p^3 - 12p) + (ax + b(xp + O(3)))(1 - 3p^2) \\
&= 4xp^4 - 12xp^2 + O(3) + ax - 3axp^2 + bpx - 3bpx^4 + O(3) \\
&= ax + bpx + O(3),
\end{aligned}$$

como $a = -1$, temos

$$\mathcal{G}_p(x, y(x, p), p) = -x + bpx + O(3),$$

e teremos também

$$\begin{aligned}
-(\mathcal{G}_x(x, y(x, p), p) + p\mathcal{G}_y(x, y(x, p), p)) &= -ap(1 - p^2) - p[p^4 - 6p^2 + 1 + bp(1 - p^2)] \\
&= -ap + ap^3 - p^5 + 6p^3 - p - bp^2 + bp^3 \\
&= -(a + 1)p - bp^2 + O(3).
\end{aligned}$$

Como $\lambda_2(p_0) = -(a + 1)$, temos

$$-(\mathcal{G}_x(x, y(x, p), p) + p\mathcal{G}_y(x, y(x, p), p)) = \lambda_2(p_0)p - bp^2 + O(3),$$

Sabendo que $a = -1$, então $\lambda_2(p_0) = 0$, assim

$$-(\mathcal{G}_x(x, y(x, p), p) + p\mathcal{G}_y(x, y(x, p), p)) = -bp^2 + O(3),$$

portanto

$$\begin{cases} x' = -x + bpx + O(3) \\ p' = -bp^2 + O(3) \end{cases},$$

com $b \neq 0$. Portanto $(0, 0, 0)$ é uma sela-nó com a variedade central tangente ao eixo projetivo. O retrato de fase é expresso na Figura 4.22, e as projeções das curvas integrais são as linhas axiais mostradas na Figura 4.21.

□

Proposição 14. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r, r \geq 5$ uma imersão tal que \mathfrak{p} é um ponto axiumbílico do tipo E_{34}^1 . Então há uma vizinhança V de \mathfrak{p} , uma vizinhança \mathcal{V} de α e uma função $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-3} , tal que para cada $\mu \in \mathcal{V}$ há um único ponto axiumbílico $\mathfrak{p}_\mu \in V$, tal que:*

- i) $d\mathcal{F}_\alpha \neq 0$,
- ii) $\mathcal{F}(\mu) < 0$ se, e somente se, \mathfrak{p}_μ é um ponto axiumbílico do tipo E_3 ,
- iii) $\mathcal{F}(\mu) > 0$ se, e somente se, \mathfrak{p}_μ é um ponto axiumbílico do tipo E_4 ,
- iv) $\mathcal{F}(\mu) = 0$ se, e somente se, \mathfrak{p}_μ é um ponto axiumbílico do tipo E_{34}^1 .

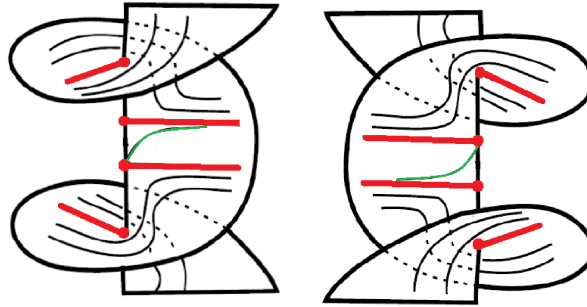


Figura 2.22: Curvas integrais de $X|_{\mathcal{G}=0}$ na vizinhança da linha projetiva no caso de um ponto axiumbílico do tipo E_{34}^1 , [4], pag. 17, 2014

Demonstração. Desde que \mathfrak{p} seja um ponto axiumbílico de α , a existência de vizinhanças \mathcal{V} e V seguem do Teorema da Função Implícita. Para $\mu \in \mathcal{V}$ com um ponto $\mathfrak{p}_\mu \in V$, depois de um movimento rígido $\Gamma_\mu \in \mathbb{R}^4$, localmente a imersão $\mu \in \mathcal{V}$ pode ser parametrizada em termos de uma carta de Monge $(x, y, R_\mu(x, y), S_\mu(x, y))$, com a origem sendo o ponto axiumbílico \mathfrak{p}_μ e

$$R_\mu(x, y) = \frac{r_{20}(\mu)}{2}x^2 + r_{11}(\mu)xy + \frac{r_{02}(\mu)}{2}y^2 + \frac{r_{30}(\mu)}{6}x^3 + \frac{r_{21}(\mu)}{2}x^2y + \frac{r_{12}(\mu)}{2}xy^2 + \frac{r_{03}(\mu)}{6}y^3 + h.o.t.$$

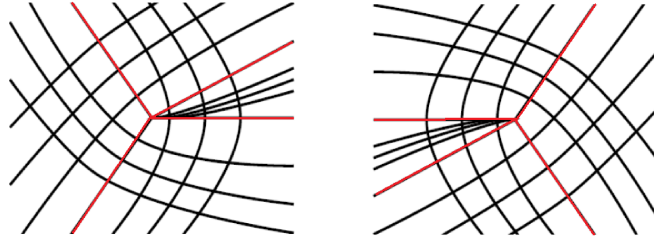


Figura 2.23: Configurações axiais na vizinhança de um ponto axiumbílico do tipo E_{34}^1 , [4], pag. 18, 2014

$$S_\mu(x, y) = \frac{s_{20}(\mu)}{2}x^2 + s_{11}(\mu)xy + \frac{s_{02}(\mu)}{2}y^2 + \frac{s_{30}(\mu)}{6}x^3 + \frac{s_{21}(\mu)}{2}x^2y + \frac{s_{12}(\mu)}{2}xy^2 + \frac{s_{03}(\mu)}{6}y^3 + h.o.t.$$

Para μ , realizando rotações e homotetias descritas no Capítulo 1, os coeficientes a_μ e b_μ podem ser expressos em função dos coeficientes da superfície, apresentada em uma carta de Monge, como foi feito na Proposição 10, considerando os coeficientes em função do parâmetro $\mu \in \mathcal{V}$.

Defina,

$$\mathcal{F}(\mu) = \Delta(a_\mu, b_\mu)$$

cujos zeros definem localmente a variedade de imersões com um ponto axiumbílico E_{34}^1 . Onde $\Delta(a, b)$ é o discriminante do polinômio $R(p) = (p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)$, dado pela equação

$$\Delta(a, b) = 16a^5 + 4(b^2 + 68)a^4 + 16(b^2 + 144)a^3 - 8(b^2 - 80)(16 + b^2)a^2 + 96(16 + b^2)a + 4(16 + b^2)^3,$$

portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mu) &= \Delta(a_\mu, b_\mu) \\ &= 16a_\mu^5 + 4(b_\mu^2 + 68)a_\mu^4 + 16(b_\mu^2 + 144)a_\mu^3 - 8(b_\mu^2 - 80)(16 + b_\mu^2)a_\mu^2 + 96(16 + b_\mu^2)a_\mu + 4(16 + b_\mu^2)^3. \end{aligned}$$

Note que, devido a representação particular dos 3-jatos, tomadas aqui, a condição $a_\mu = -1$ na definição 7 a extensão do jato da imersão não é transversal, mas tangente à variedade de jatos, com pontos axiumbílicos E_{34}^1 . Isto é sempre possível por uma rotação apropriada no plano $\{x, y\}$, ao supor que $a_\mu \notin \left\{-\frac{27}{2}, -1\right\}$.

As afirmações (ii), (iii) e (iv) seguem da definição de \mathcal{F} e da análise prévia do sinal do discriminante $\Delta(a_\mu, b_\mu)$.

Além disso, a derivada de $\mathcal{F}(\mu)$ na direção da coordenada a , levando a concluir que $d\mathcal{F}_\alpha \neq 0$, de fato assumindo $s_{11}(\alpha) = \frac{1}{2}r \neq 0$, segue que

$$a_0(\mu)(x, y) = y + O(2)$$

$$a_1(\mu)(x, y) = -\frac{4(r(\mu)^2 + s(\mu)^2)\alpha_2(\mu)}{r(\mu)(r(\mu)\alpha_3(\mu) + s(\mu)\alpha_4(\mu))}x +$$

$$\begin{aligned} & \frac{4(s(\mu)\alpha_3(\mu) - r(\mu)\alpha_4(\mu))}{r(\mu)\alpha_3(\mu) + s(\mu)\alpha_4(\mu)}y + O(2) \\ & = a(\mu)x + b(\mu)y + O(2), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s_{12} - s_{30} + 2r_{21} \\ \alpha_2 &= r_{30} - r_{12} + 2s_{21} \\ \alpha_3 &= s_{03} - s_{21} + 2r_{12} \\ \alpha_4 &= r_{21} - r_{03} + 2s_{12}. \end{aligned}$$

Considere a deformação

$$\alpha_\mu = (x, y, R_\alpha(x, y), S_\alpha(x, y)) + \left(0, 0, \mu\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2\right), \mu x^2y\right).$$

Então, como $\alpha_2 = r_{30} - r_{12} + 2s_{21}$, segue que

$$a(\mu) = \frac{4(r^2 + s^2)(\alpha_2 + \mu)}{r(r\alpha_3 + s\alpha_4)}$$

e

$$\frac{d}{d\mu} (\Delta(a(\mu), b(\mu)))|_{t=0} = \frac{\partial \Delta}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\mu} = \frac{\partial \Delta}{\partial a} \cdot \left(-\frac{4(r^2 + s^2)}{r(r\alpha_3 + s\alpha_4)}\right) \neq 0.$$

No caso onde $s_{11}(\alpha)$, segue que $r_{11}(\alpha) = -\frac{1}{2}s \neq 0$, $\alpha_1\alpha_4 \neq 0$ e $\alpha_2(\mu) = 0$. Agora considere a deformação

$$\alpha_\mu = (x, y, R_\alpha(x, y), S_\alpha(x, y)) + \left(0, 0, \mu x^2y, \mu\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2\right)\right).$$

Então, $a(\mu) = \frac{4(\alpha_1 + \mu)}{\alpha_4}$ e

$$\frac{d}{d\mu} (\Delta(a(\mu), b(\mu)))|_{t=0} = \frac{\partial \Delta}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\mu} = \frac{\partial \Delta}{\partial a} \cdot \left(\frac{4}{\alpha_4}\right) \neq 0$$

□

2.6 O ponto axiumbílico $E_{4,5}^1$

Considere a carta de Monge descrita pelas equações 1.4.1 e 1.4.2. Suponha que a origem é um ponto axiumbílico, que é expressa por

$$R(x, y) = \frac{r_{20}}{2}x^2 + r_{11}xy + \frac{r_{02}}{2}y^2 + \frac{r_{30}}{6}x^3 + \frac{r_{21}}{2}x^2y + \frac{r_{12}}{2}xy^2 + \frac{r_{03}}{6}y^3 + \frac{r_{40}}{24}x^4 + \quad (2.6.1)$$

$$\frac{r_{31}}{6}x^3y + \frac{r_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{r_{13}}{6}xy^3 + \frac{r_{04}}{24}y^4 + h.o.t.$$

$$S(x, y) = \frac{s_{20}}{2}x^2 + s_{11}xy + \frac{s_{02}}{2}y^2 + \frac{s_{30}}{6}x^3 + \frac{s_{21}}{2}x^2y + \frac{s_{12}}{2}xy^2 + \frac{s_{03}}{6}y^3 + \frac{s_{40}}{24}x^4 + \quad (2.6.2)$$

$$\frac{s_{31}}{6}x^3y + \frac{s_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{s_{13}}{6}xy^3 + \frac{s_{04}}{24}y^4 + h.o.t.$$

onde, $r_{02} = r_{20} + r$, $r_{11} = -\frac{s}{2}$, $s_{02} = s_{20} + s$ e $s_{11} = \frac{r}{2}$.

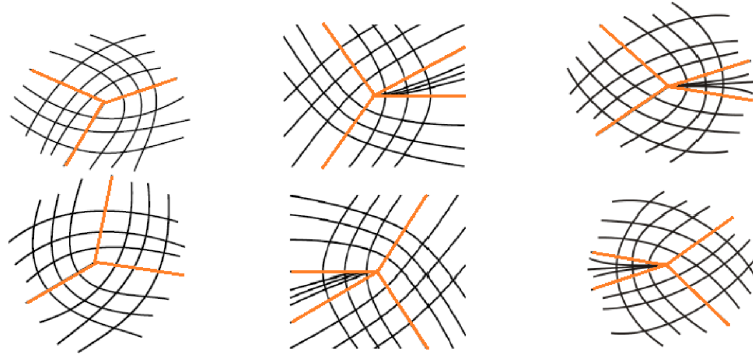


Figura 2.24: Transição entre configurações axiais do tipo E_3 para E_4 , [4], pag. 19, 2014

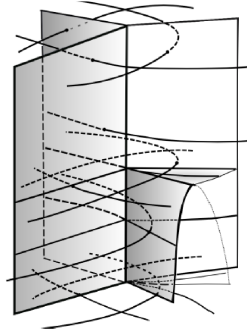


Figura 2.25: Diagrama de bifurcação das configurações axiais próxima a um ponto axiumbílico E_{34}^1 e a estrutura de separatrizes, [4], pag. 20, 2014

Sejam

$$\alpha_1 = s_{12} - s_{30} + 2r_{21}$$

$$\alpha_2 = r_{30} - r_{12} + 2s_{21}$$

$$\alpha_3 = s_{03} - s_{21} + 2r_{12}$$

$$\alpha_4 = r_{21} - r_{03} + 2s_{12}$$

$$\beta_1 = s_{22} - s_{40} + 2r_{31}$$

$$\beta_2 = r_{40} - r_{22} + 2s_{31}$$

$$\beta_3 = s_{13} - s_{31} + 2r_{22}$$

$$\beta_4 = r_{31} - r_{13} + 2s_{22}$$

$$\beta_5 = s_{04} - s_{22} + 2r_{13}$$

$$\beta_6 = r_{22} - r_{04} + 2s_{13}.$$

As funções a_0 e a_1 (veja a Proposição 7) são dados por

$$a_0(x, y) = a_{10}^0 x + a_{01}^0 y + \frac{1}{2} a_{20} x^2 + a_{11} xy + \frac{1}{2} a_{02} y^2 + h.o.t. \quad (2.6.3)$$

e

$$a_1(x, y) = b_{10}x + b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 + h.o.t, \quad (2.6.4)$$

onde

$$a_{10} = \frac{1}{2}(r\alpha_1 + s\alpha_2) \quad (2.6.5)$$

$$\begin{aligned} a_{01} &= \frac{1}{2}(r\alpha_3 + s\alpha_4) \\ a_{20} &= -\alpha_2r_{21} + \alpha_1s_{21} + \left[\frac{\beta_1}{4} + \frac{s_{20}}{2}(r_{20}^2 + s_{20}^2) \right] r + \left[\frac{\beta_2}{4} - \frac{r_{20}}{2}(r_{20}^2 + s_{20}^2) \right] s + (r_{20}^2 - s_{20}^2)sr \\ &\quad - \frac{3}{8}(r^2 + s^2)(s_{20}r - r_{20}s) + r_{20}s_{20}(s^2 - r^2) \\ a_{11} &= -\alpha_2r_{12} + \alpha_1s_{12} + -\alpha_4r_{21} + \alpha_3s_{21} - \left[\frac{\beta_3}{2} + r_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2) \right] r + \left[\frac{\beta_4}{2} - s_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2) \right] s \\ &\quad - 2s_{20}r_{20}rs - \frac{1}{2}(3s_{20}^2 + r_{20}^2)s^2 - \frac{1}{2}(3r_{20}^2 + s_{20}^2)r^2 - \frac{3}{8}(r^2 + s^2)^2 - \frac{5}{4}(r^2 + s^2)(r_{20}r - s_{20}s) \\ a_{02} &= -\alpha_4r_{12} + \alpha_3s_{12} + \left[\frac{\beta_5}{2} + \frac{s_{20}}{2}(r_{20}^2 + s_{20}^2) \right] r + \left[\frac{\beta_6}{2} - \frac{r_{20}}{2}(r_{20}^2 + s_{20}^2) \right] s + (-2s_{20}^2 + 2r_{20}^2)sr \\ &\quad + (r_{20}^2 - s_{20}^2)sr + 2s_{20}r_{20}(s^2 - 2r^2) - \frac{9}{8}(r^2 + s^2)(s_{20}r - r_{20}s) \\ b_{10} &= 2(s\alpha_1 - r\alpha_2) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

$$\begin{aligned} b_{01} &= 2(s\alpha_3 - r\alpha_4) \\ b_{20} &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 4(s_{21}\alpha_2 + r_{21}\alpha_1) + [-\beta_2 + 2r_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2)] r + [\beta_1 - s_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2)] s \\ &\quad - \frac{1}{2}(r^2 + s^2)(s_{20}s + r_{20}r) + 4(r_{20}s - s_{20}r)^2 \\ b_{11} &= 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_4\alpha_2) - 4(\alpha_1r_{12} + \alpha_2s_{12} + \alpha_3r_{21} + \alpha_4s_{21}) + 2[-\beta_4 + 2s_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2)] r \\ &\quad + 2[\beta_3 - 2r_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2)] s + 4(s_{20}^2 - r_{20}^2)rs + 4s_{20}r_{20}(r^2 - s^2) \\ b_{02} &= \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + 4(r_{12}^2 + s_{12}^2) + 4s_{12}(r_{21} - r_{03}) + 4s_{12}(s_{03} - s_{21}) + [-\beta_6 - 2r_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2)] r \\ &\quad + 2[\beta_5 - 2s_{20}(r_{20}^2 + s_{20}^2)] s + 2(r_{20}^2 - 3s_{20}^2)s^2 + 2(s_{20}^2 - r_{20}^2)r^2 \end{aligned}$$

Definição 9. Um ponto axiumbílico \mathbf{p} é dito do tipo $E_{4,5}^1$, se a variedade \mathbb{L}_α têm exatamente 4 pontos singulares, que são do tipo Morse ao longo da linha projetiva.

Um ponto (x, y, p) é dito do tipo Morse quando

$$Hess(\mathcal{G}(x, y, p)) \neq 0.$$

Proposição 15. Considere uma carta de Monge e uma homotetia tal que a equação diferencial de linhas axiais é escrita como

$$a_0(x, y)(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + a_1(x, y)dxdy(dx^2 - dy^2) + O(3) = 0,$$

onde

$$a_0(x, y) = y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + h.o.t.$$

e

$$a_1(x, y) = b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 + h.o.t.$$

Então, as seguintes condições são equivalentes:

- i) As curvas $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ são regulares e possuem contato quadrático em $(0, 0)$,
- ii) O ponto axiumbílico $(0, 0)$ é do tipo $E_{4,5}^1$,
- iii) O campo vetorial de Lie-Cartan definido em \mathbb{L}_α , têm uma sela-nó quadrática no eixo projetivo, com a variedade central transversal à linha projetiva.

Demonstração. A equação diferencial das linhas axiais pode ser escrita como

$$a_0(x, y)(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + a_1(x, y)dxdy(dx^2 - dy^2) + O(3) = 0,$$

onde

$$a_0(x, y) = a_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + h.o.t.$$

e

$$a_1(x, y) = b_{10}x + b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 + h.o.t.,$$

onde os coeficientes de a_0 e a_1 são dados pelas equações 2.6.5 e 2.6.6. Aqui $O(3)$ significa os termos de ordem maior ou igual a 3 nas variáveis x e y .

No que se segue, será considerada uma carta de Monge tal que $a_{10} = 0$. Isto é possível como mostrado no lema 4 e proposição 10. Desde que o contato entre $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ é supostamente quadrático, isto resulta que $b_{10} = 0$ e $a_{01} \cdot b_{01} \neq 0$. Também por uma homotetia é possível obter $a_{01} = 1$.

Então, isto resulta que

$$a_0(x, y) = y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + h.o.t. \quad (2.6.7)$$

e

$$a_1(x, y) = b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 + h.o.t. \quad (2.6.8)$$

Portanto, a condição de contato quadrático, entre as duas curvas regulares é expressa por $\mathcal{X} = b_{20} - a_{20}b_{01} \neq 0$.

Afirmção 3. Na vizinhança de $(0, 0, 0)$, o campo vetorial de Lie-Cartan restrito à superfície $\mathcal{G} = 0$, pode ser expresso na carta (x, p) por

$$\begin{cases} x' = \frac{\mathcal{X}}{2}x^2 + O(3) \\ p' = -p + \frac{3}{2}a_{11}a_{20}x^2 - (a_{11} + \mathcal{X})p - b_{01}p + O(3) \end{cases} \quad (2.6.9)$$

e $(0, 0, 0)$ é uma sela-nó quando $\mathcal{X} \neq 0$.

Demonstração. Desde que $\mathcal{G}_y(0, 0, 0) = 1$, segue do Teorema da Função Ímplicita que localmente $y = y(x, p)$ e

$$\mathcal{G}(x, y(x, p), p) = 0$$

A expansão de Taylor de $y(x, p)$ na vizinhança de $(x, p) = (0, 0)$ é dada por:

$$y(x, p) = -\frac{1}{2}a_{20}x^2 + O(3). \quad (2.6.10)$$

O espaço vetorial de Lie-Cartan restrito à superfície $\mathcal{G} = 0$ é dado por

$$\begin{cases} x' = \mathcal{G}_p(x, y(x, p), p) = \frac{\mathcal{X}}{2}x^2 + O(3) \\ p' = -(\mathcal{G}_x + p\mathcal{G}_y)(x, y(x, p), p) = -p + \frac{3}{2}a_{11}a_{20}x^2 - (a_{11} + \mathcal{X})p - b_{01}p + O(3) \end{cases}$$

Os autovalores do campo vetorial 2.6.9 em $(0, 0)$ são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$ com respectivos autoespaços $\mathcal{L}_1 = (1, -a_{20})$ e $\mathcal{L}_2 = (0, 1)$. Pela Teoria de Variedades Invariantes, a variedade central é tangente à \mathcal{L}_1 e é dada por:

$$W^c = \{(x, -a_{20}x + \frac{3}{2}a_{20}(\mathcal{X} + a_{11})x^2 + O(3))\}.$$

A restrição do campo vetorial 2.6.9 à variedade central é dada por:

$$\left[\frac{1}{2}\mathcal{X}x^2 + O(3) \right] \frac{\partial}{\partial x}.$$

□

Afirmção 4. *A função \mathcal{G} têm exatamente 4 pontos críticos na linha projetiva, e eles são do tipo Morse de índice 1 ou 2 se, e somente se, $\mathcal{X} \neq 0$.*

Demonstração. Os pontos críticos de \mathcal{G} ao longo da linha projetiva são determinados por:

$$S(p) = \mathcal{G}_v(0, 0, p) = (p^4 - 6p^2 + 1) + b_{01}p(1 - p^2) = 0 \quad (2.6.11)$$

que têm quatro raízes reais simples localizadas nos intervalos $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1)$ e $(1, \infty)$. Isto decorre de $S(\pm 1) = -4$, $S(0) = 1$ e do discriminante $\Delta(S) = 4(16 + b_{01}^2)^3 > 0$.

Ao longo da linha projetiva, o determinante da Hessiana de \mathcal{G} é dado por:

$$Hess \mathcal{G}(0, 0, p) = -(a_{20}(1 - 6p^2 + p^4) + b_{20}p(1 - p^2))(b_{01} - 12p - 3b_{01}p^2 + 4p^3)^2. \quad (2.6.12)$$

A resultante entre $S(p)$ e $Hess \mathcal{G}(0, 0, p)$ é dado por:

$$256\mathcal{X}^4(16 + b_{01}^2)$$

e portanto $Hess \mathcal{G}(0, 0, p) \neq 0$ nos pontos críticos de \mathcal{G} . Isto implica que os pontos críticos são do tipo Morse. Como $\mathcal{G}(0, 0, p) = 0$, segue que o índice dos pontos críticos é 1 ou 2 e então localmente o conjunto de nível $\mathcal{G} = 0$ é um cone.

Os autovalores da derivada do campo vetorial de Lie-Cartan em um ponto $(0, 0, p)$ são dados por:

$$\lambda_1 = -p(-4p^3 + 3b_{01}p^2 + 12p - b_{01})$$

$$\lambda_2 = -1 + 18p^2 - 5p^4 - 2b_{01}p + 4b_{01}p^3.$$

Nos pontos críticos p_i satisfazendo $S(p_i) = 0$, segue que

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{p^6 + 3p^4 + 3p^2 + 1}{p^2 - 1}$$

então $\lambda_1^i \cdot \lambda_2^i < 0$, para $i = 1, \dots, 4$.

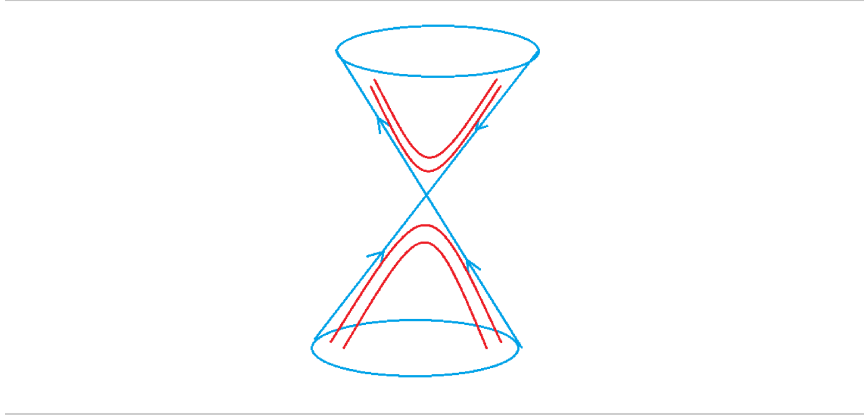


Figura 2.26: Conjunto de nível

Portanto, estes 4 pontos são selas do campo vetorial de Lie-Cartan. Como a linha projetiva é invariante, segue que a outra variedade invariante (estável ou instável) de um ponto singular é transversal a linha projetiva.

□

□

Proposição 16. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 5$ e \mathfrak{p} um ponto axiumbílico. Suponha, na carta de Monge expressa pelas equações 2.6.7 e 2.6.8, que $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ e $\mathcal{X} \neq 0$. Então \mathfrak{p} é um ponto axiumbílico do tipo $E_{4,5}^1$ e a configuração axial de α na vizinhança de \mathfrak{p} é como mostrada na Figura 4.25.*



Figura 2.27: Configuração axial na vizinhança de um ponto axiumbílico do tipo E_{45}^1 , [4], pag. 24, 2014

Demonstração. A condição $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ implica o contato não-transversal das curvas $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ no ponto axiumbílico \mathfrak{p} expresso na carta de Monge por $(0,0)$. Pelo lema 4 e proposição 10, é possível expressar estas curvas como na equação 2.6.8. Assumindo $\mathcal{X} \neq 0$, nós temos o contato quadrático das curvas no ponto axiumbílico.

A proposição 15 implica que sobre o ponto axiumbílico nós temos cinco equilíbrios do campo vetorial de Lie-Cartan. um deles é um ponto regular da superfície de Lie-Cartan, e este é um equilíbrio do tipo sela-nó com variedade central transversal ao eixo p (ver afirmação 3).

O restante dos equilíbrios são pontos críticos do tipo Morse da superfície de Lie-Cartan. Na vizinhança destes pontos, o conjunto nível $\mathcal{G} = 0$ são localmente cones, e os 4 pontos são selas no campo vetorial de Lie-Cartan (ver afirmação 4).

Portanto, concluímos a configuração descrita na Figura 4.26, cuja projeção dos pontos sela-nó e os setores paralelos descrevem as configurações axiais principal e média perto do ponto axiumbílico \mathbf{p} do tipo E_{45}^1 . (figura 4.25)

□

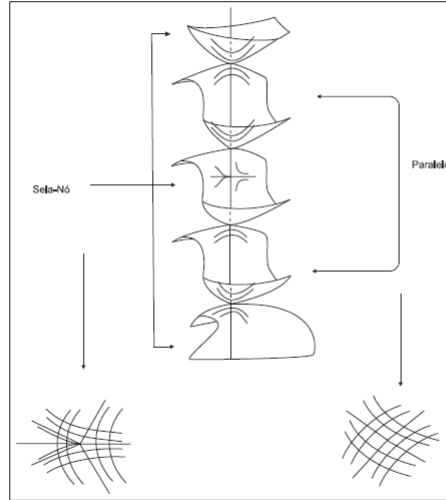


Figura 2.28: Campo vetorial de Lie-Cartan próximo a um ponto axiumbílico do tipo E_{45}^1 e a configuração axial (principal e média,[23], pag. 52)

Proposição 17. *Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r, r \geq 5$ uma imersão, tendo um ponto axiumbílico \mathbf{p} . Então, existe uma vizinhança V de \mathbf{p} , uma vizinhança \mathcal{V} de α e uma função $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-3} , tal que:*

- i) $d\mathcal{F}_\alpha \neq 0$,
- ii) $\mathcal{F}(\mu) = 0$ se, e somente se, $\mu \in \mathcal{V}$ têm apenas um ponto axiumbílico em V , que é do tipo $E_{4,5}^1$,
- iii) $\mathcal{F}(\mu) < 0$ se, e somente se, μ têm exatamente dois pontos axiumbílicos em V , um do tipo E_4 e o outro do tipo E_5 ,
- iv) $\mathcal{F}(\mu) > 0$ se, e somente se, μ não têm pontos axiumbílicos em V .

Demonstração. Pela proposição 15, α sendo uma imersão e tendo um ponto axiumbílico \mathbf{p} do tipo E_{45}^1 , as curvas $a_0^\alpha = 0$ e $a_1^\alpha = 0$ têm contato quadrático em \mathbf{p} , desde que

$$\frac{\partial a_0^\alpha}{\partial y}(0,0) = a_{01} \neq 0,$$

segue do Teorema da Função Ímplicita, que localmente para μ na vizinhança \mathcal{V} de α , $y = y_\mu(x)$ e $a_0^\mu(x, y_\mu(x)) = 0$.

Além disso,

$$\frac{\partial^2 a_1^\alpha}{\partial^2 x}(0,0) = b_{20} \neq 0$$

e então $x = x_\mu$ é uma solução local de

$$\frac{\partial a_1^\mu}{\partial x}(x_\mu, y_\mu(x_\mu)) = a_{01} = 0.$$

Defina $\mathcal{F}(\mu) = a_1^\mu(x_\mu, y_\mu(x_\mu))$. Considere a variação

$$h_\mu(x, y) = (x, y, R(x, y) + \mu xy, S(x, y) + \mu xy).$$

Segue que

$$\left. \frac{d\mathcal{F}(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0}$$

e então $d\mathcal{F}_\alpha \neq 0$. Portanto, o resultado segue do Teorema da Função Ímplicita.

O ponto axiumbílico do tipo E_{45}^1 é portanto a transição entre zero e dois pontos axiumbílicos, um do tipo E_4 e o outro do tipo E_5 .

Nas figuras 4.27 e 4.28 são ilustradas estas transições, com a configuração axial expressa em dois estilos diferentes. Veja também figura 4.28 para uma ilustração de transição na superfície de Lie-Cartan.

□

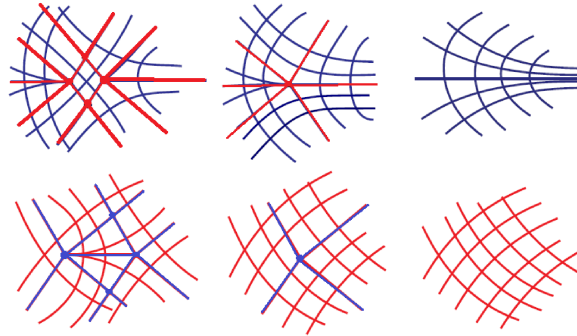


Figura 2.29: Ponto axiumbílico do tipo E_{45}^1 . Os pontos axiumbílicos E_4 e E_5 colidem no ponto E_{45}^1 , e depois que eles são eliminados e não há pontos axiumbílicos. [4], pag 26, 2014

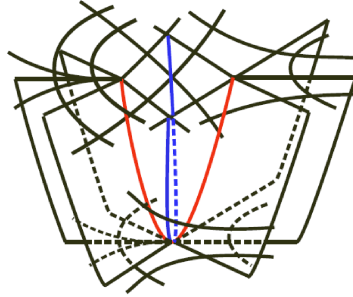


Figura 2.30: Diagrama de bifurcação das configurações axiais próximo a um ponto axiumbílico do tipo E_{45}^1 e a estrutura de separatizes, [4], pag 27, 2014

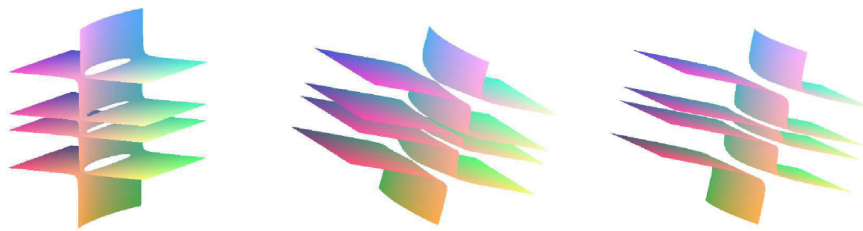


Figura 2.31: Superfície de Lie-Cartan, a esquerda com 2 pontos axiumbílicos, no centro com 4 pontos singulares e a direita com 4 níveis regulares. [4], pag 27, 2014

Capítulo 3

Transversalidade e Estratificação

3.1 Espaço de Variedades Estratificadas

Definição 10. Uma estratificação de um espaço X consiste de: um conjunto de índices \mathcal{I} e uma partição localmente finita $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de subespaços localmente fechados de X , onde $X_i \cap X_j = \emptyset$ e

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i = X.$$

Para $i \in \mathcal{I}$, X_i é dito o i -estrato e o conjunto fechado

$$X^i = \bigcup \{X_k / X_k \cap \overline{X^i} \neq \emptyset\}$$

é dito o i -esqueleto.

Para um espaço X com uma estratificação $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, definimos uma relação \leq no conjunto índice \mathcal{I} por $i \leq j$ se, e somente se, $X_i \subseteq \overline{X_j}$.

A condição de fronteira é satisfeita se, para todo $i, j \in \mathcal{I}$,

$$X_i \cap \overline{X_j} \neq \emptyset \Rightarrow X_i \subseteq \overline{X_j}.$$

Neste caso \leq é uma ordenação parcial de \mathcal{I} e $X^i = \overline{X_i}$ para cada $i \in \mathcal{I}$. Uma aplicação entre espaços com estratificação preserva estrato, se leva estrato em estrato.

3.2 Teorema de Genericidade

Uma família a um parâmetro de superfícies imersas será uma família α_μ de imersões de uma superfície orientada M^2 no espaço \mathbb{R}^4 , onde $\mu \in \mathbb{R}$. A família α_μ será dita suave se $\alpha(m, \mu) = \alpha_\mu(m)$ é de classe C^∞ no produto $M^2 \times \mathbb{R}$. O espaço dessas famílias, denotado por $\mathcal{F}_{M^2 \times \mathbb{R}}$ será dotado da topologia de Whitney. O termo genérico, usado para nos referirmos a uma propriedade da família, significa que é válida para uma família que contém a interseção enumerável de abertos densos em $\mathcal{F}_{M^2 \times \mathbb{R}}$. Pelo Teorema de Baire esta coleção será densa. Ver [14].

Considere o espaço $\mathbb{J}^k(M, \mathbb{R}^4)$ de k -jatos de imersão α de uma superfície compacta orientada M em \mathbb{R}^4 , dotado com a estrutura de fibrado principal. A base é M , a fibra é o espaço $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{J}^k(2, 4)$, onde $\mathbb{J}^k(2, 4)$ é o espaço dos k -jatos de imersões de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^4 , preservando respectivas origens. O grupo estrutural A_+^k , é o produto de grupos de $\mathcal{L}_+^k(2, 2)$ de k -jatos de origem e orientação preservando difeomorfismos de \mathbb{R}^2 , agindo na direita por mudança de coordenadas, e o grupo $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{O}_+(4, 4)$ de isometrias positivas, agindo na esquerda, consistindo de uma translação, tomada como um vetor no primeiro fator, e uma rotação positiva de \mathbb{R}^4 , tomada no segundo fato. Denote por $\prod_{k,l}$, $k \leq l$ a projeção de $\mathbb{J}^l(2, 4)$ em $\mathbb{J}^k(2, 4)$. É bom saber que ação de grupos comuta com projeções.

Definição 11. Definimos abaixo a estratificação axiumbílica canônica de $\mathbb{J}^4(2, 4)$. O termo canônico significa que o estrato é invariante pela ação do grupo $\mathbb{A}_+^k = \mathcal{O}_+(4, 4) \times \mathcal{L}_+^k(2, 2)$.

1. *Jatos axiumbílicos:* \mathcal{U}^4 , aqueles na órbita de $j^4(x, y, R(x, y), S(x, y))$, onde R e S são as equações 1.4.2 e 1.4.2, satisfazendo as condições axiumbílicas definidas em termos de $j^2R(0)$ e $j^2S(0)$. É uma variedade fechada de codimensão 2.
2. *Jatos não-axiumbílicos:* $(\mathcal{NU})^4$ é o complemento de \mathcal{U}^4 . É uma subvariedade aberta de codimensão 0.
3. *Jatos axiumbílicos não-estáveis:* $(\mathcal{NE})^4$ na órbita dos jatos axiumbílicos para que:
 - a. $T = (\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3)(r^2 + s^2) = 0$ ou
 - b. $T \neq 0$ e condições que caracterizam E_3 ou E_4 pontos axiumbílicos na Proposição 12, falham.

Esta é uma variedade fechada de codimensão 3, que pode ser expressa pela união dos seguintes estratos invariantes:

- 3.1. *Jatos Não-Transversais:* \mathcal{E}_{45}^1 para que $T = 0$ e $\mathcal{X} \neq 0$. ele têm codimensão 3.
- 3.2. *Jatos Duplos-Transversais:* $(\mathcal{E}_{34}^1)^4$, o campo de Lie-Cartan têm uma sela-nó quadrática na linha projetiva que é caracterizada pela Proposição 14. Têm codimensão 3.

4. *Os jatos axiumbílicos estáveis:* $(\mathcal{UE})^4$, o complemento em \mathcal{U}^4 de $(\mathcal{NE})^4$.

A estratificação canônica de $\mathbb{J}^4(2, 4)$ induz uma estratificação canônica de $\mathbb{J}^4(M^2, \mathbb{R}^4)$ cujos estratos são subfibrados principais, com codimensão igual a das suas fibras, que são os estratos canônicos de $\mathbb{J}^4(2, 4)$ como definidos acima.

A coleção dos subfibrados que estratificam $\mathbb{J}^4(M^2, \mathbb{R}^4)$ será chamada estratificação axiumbílica. Os estratos são:

- $\mathbb{U}^4(M^2, \mathbb{R}^4)$, correspondente a \mathcal{U}^4 ;
- $(\mathcal{NU})^4(M^2, \mathbb{R}^4)$, correspondente a \mathcal{NU}^4 ;
- $(\mathcal{NE})^4(M^2, \mathbb{R}^4)$, correspondente ao estrato dos jatos axiumbílicos não-estáveis $(\mathcal{NE})^4$, referente aos pontos axiumbílicos E_{34}^1 e E_{45}^1 ;
- $(\mathcal{UE})^4(M^2, \mathbb{R}^4)$, correspondente ao estrato dos jatos axiumbílicos estáveis $(\mathcal{UE})^4$, referente aos pontos axiumbílicos E_3, E_4 e E_5 .

Teorema 4. As seguintes propriedades são genéricas para famílias a um parâmetro, α_μ , de imersões em $\mathcal{F}_{M^2 \times \mathbb{R}}$. O conjunto $\mathbb{U}(\alpha_\mu)$ de pontos (\mathfrak{p}, μ) em $M^2 \times \mathbb{R}$ tal que \mathfrak{p} é um ponto axiumbílico de α_μ , forma uma subvariedade, de $M^2 \times \mathbb{R}$, diferenciável e de codimensão 2, estratificada como segue:

- Os pontos axiumbílicos estáveis, E_1, E_2 e E_3 , ocorrem ao longo de subvariedades de $\mathbb{U}(\alpha)$ de codimensão 0;
- Os pontos axiumbílicos não-estáveis E_{34}^1 e E_{45}^1 , ocorrem ao longo de subvariedades de codimensão 1.

Demonstração. Seja a extensão do 4-jato

$$j^4\alpha : M^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{J}^4(M^2, \mathbb{R}^4)$$

$$j^4\alpha = j^4\alpha(0)$$

Considere o seguinte conjunto:

$$\tau_{Z_i} = \{j^4 \in C^\infty(M, \mathbb{J}^4(M^2, \mathbb{R}^4)); j^4\alpha \asymp Z_i\}$$

onde os subconjuntos Z_i , $i = 1, 2, 3, 4$, são os estratos de $\mathbb{J}^4(M^2, \mathbb{R}^4)$ (Definição 29), que são subvariedades diferenciáveis. Neste caso são:

a) Jatos axiumbílicos: $Z_1 = \mathbb{U}^4$, com as condições de axiumbilidade:

$$a_0(\mu)(x, y) = 0 \quad e \quad a_1(\mu)(x, y) = 0,$$

e tendo codimensão 2;

b) Jatos não-axiumbílicos: $Z_2 = (\mathbb{NU})^4$ é o complemento de \mathcal{U}^4 , com codimensão 0;

c) Jatos axiumbílicos não-estáveis: $Z_3 = \mathbb{NE}^4$, com a condição do item a), e além disso com

$$\Delta(a_\mu, b_\mu) = 0,$$

e tendo codimensão 3;

d) Jatos axiumbílicos estáveis: $Z_4 = (\mathbb{UE})^4$, o complemento em \mathcal{U}^4 de $(\mathcal{NE})^4$, com a condição

$$\Delta(a_\mu, b_\mu) \neq 0,$$

e tendo codimensão 3.

Dessa forma pelo Teorema 9 o conjunto τ_{Z_i} é aberto e denso. Pelo Teorema 11 concluímos a demonstração.

□

Conclusão 1. *No espaço das aplicações suaves de $M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, que são imersões relativas para a primeira variável, aqueles que têm seus pontos axiumbílicos de qualquer gênero (do tipo E_3 , E_4 e E_5) ou, transversalmente, dos tipos E_{34}^1 e E_{45}^1 são abertos e densos. Além disso, para tal família os pontos axiumbílicos descrevem uma curva regular em $M \times \mathbb{R}$ cuja projeção em \mathbb{R} têm apenas pontos críticos não-degenerados em E_{45}^1 e os pontos regulares da projeção formam uma coleção de arcos limitados por pontos E_{34}^1 , com uma fronteira comum de arcos E_3 e E_4 .*

O exposto no parágrafo anterior, segue a partir da análise das proposições 14 e 17 e uma aplicação do Teorema da Transversalidade de Thom para a subvariedade de quatro jatos de imersões em pontos axiumbílicos, estratificada por pontos axiumbílicos genéricos, do tipo E_{34}^1 e E_{45}^1 , e seus complementos. Como visto na definição 11.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Imersões, submersões e Posto

Definição 12. Uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ chama-se uma *imersão* quando, para cada $x \in U$, a derivada

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

é uma transformação linear injetiva.

Exemplo 1 (Inclusão).

$$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto (x, 0)$$

Teorema 5. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e uma aplicação

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

de classe C^k , $k \geq 1$. Suponha que no ponto $x_0 \in U$ a derivada

$$Df(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

é injetiva. Então f se comporta localmente como uma inclusão. Ou seja, existem abertos V, W, Y com

$$f(x_0) \in Y, \quad Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$$x_0 \in V, \quad V \subset U \subset \mathbb{R}^m$$

$$0 \in W, \quad W \subset \mathbb{R}^n$$

e um difeomorfismo de classe C^k ,

$$h : Y \longrightarrow V \times W$$

$$h \circ f(x) = (x, 0)$$

com $x \in V$.

Demonstração. Ver [14].

□

Definição 13. Uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se uma submersão quando, para todo $x \in U$, a derivada

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad m \geq n$$

é sobrejetiva.

Exemplo 2 (Projeção).

$$\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \longmapsto y$$

Teorema 6 (Forma local das submersões). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Suponha que, no ponto $z_0 \in U$, a derivada*

$$Df(z_0) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é sobrejetiva. Escolhida uma decomposição em soma direta

$$E \oplus F = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

tal que $\partial_2 f(z_0) = Df(z_0)|_F$ é um isomorfismo, então f se comporta localmente como uma projeção.

Dessa forma, existem abertos V, W e Z , com

$$x_0 \in V, \quad V \subset E$$

$$z_0 \in V, \quad Z \subset U$$

$$f(z_0) \in W, \quad W \subset \mathbb{R}^n$$

e um difeomorfismo de classe C^k ,

$$h : V \times W \longrightarrow Z$$

$$f \circ h : (x, w) \longmapsto w$$

Demonstração. Ver [14]. □

Definição 14 (Posto). *O posto de uma aplicação linear*

$$T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é a dimensão da imagem $T(\mathbb{R}^m)$, ou seja, o número máximo de vetores L.I. entre Te_1, \dots, Te_m .

Definição 15 (Posto de uma aplicação diferenciável). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. O posto de f , num ponto $x \in U$ é definido como sendo o posto de sua derivada*

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

4.2 Superfície m -dimensional

Seja U_0 um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m .

Definição 16 (Mergulho). Uma imersão de classe C^k , $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, diz-se um mergulho de classe C^k de U_0 em \mathbb{R}^n , se φ for um homeomorfismo de U_0 sobre $\varphi(U_0)$.

Definição 17 (Parametrizações). Se $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for um mergulho de classe C^k , então diremos que φ é uma parametrização, de dimensão m , de classe C^k , do conjunto $U = \varphi(U_0) \subset \mathbb{R}^n$.

Observação 8. Se φ é uma parametrização de classe C^k do subconjunto $U = \varphi(U_0) \subset \mathbb{R}^n$, então da injetividade de $\varphi'(x)$ são equivalentes:

- i) $\varphi'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva;
- ii) $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \varphi'(x).e_j$, com $j = 1, \dots, m$ são L.I. ;
- iii) $Jac \varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(x) \right)$, ($i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$), onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, têm posto m , ou seja, algum dos seus determinantes menores $m \times m$ é diferente de zero.

Definição 18. Uma superfície m -dimensional do \mathbb{R}^n de classe C^k é um subconjunto não-vazio

$$M^m \subset \mathbb{R}^n$$

onde em cada ponto $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U , onde $U \cap M^m$ possui uma parametrização de classe C^k e dimensão m .

Observação 9. 1. A vizinhança U da definição acima é chamada vizinhança coordenada.

2. O número m é a dimensão de M^m

3. O número $n - m$ é chamado codimensão de M^m em \mathbb{R}^n .

4.3 Mudança de coordenadas

Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície m -dimensional de classe C^k e $\varphi : U_0 \rightarrow U$ uma parametrização do aberto $U \subset M^m$. Os pontos de U são determinados por m coordenadas (ou parâmetros ou quantidades):

$$(x^1, \dots, x^m) \in U_0 \mapsto p = \varphi(x^1, \dots, x^m) \in U$$

Se V_0 é um conjunto aberto do \mathbb{R}^m e $\xi : V_0 \rightarrow U_0$ é um difeomorfismo de classe C^k , então

$$\varphi \circ \xi : V_0 \rightarrow U$$

é ainda uma parametrização de U . A aplicação ξ é normalmente denominada uma *mudança de coordenadas*.

4.4 Espaço Tangente

Sejam $M^m \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k com $k \geq 1$ e uma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U \subset M^m$ com $p = \varphi(x)$.

O espaço tangente a M^m no ponto p é o espaço vetorial de dimensão m

$$T_p M = \varphi'(\mathbb{R}^m)$$

que têm como base

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x) \right\}$$

4.5 Variedades Diferenciáveis

Definição 19 (Variedades Diferenciáveis). *Uma variedade diferenciável de dimensão m é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

- 1) $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$
- 2) Para todo α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.

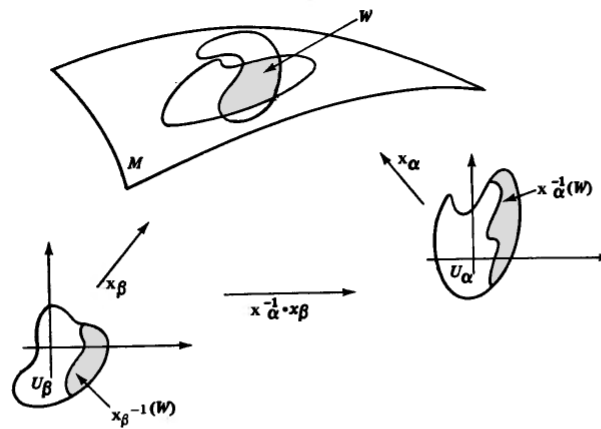


Figura 4.1: [2], pag.3, 1992

Observação 10. 1. O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou aplicação \mathbf{x}_α) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p ; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p .

2. Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo as condições (1) e (2) da definição anterior é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Exemplo 3 (Superfícies em \mathbb{R}^n). Uma superfície m -dimensional do \mathbb{R}^n de classe C^k é um subconjunto não vazio

$$M = M^m \subset \mathbb{R}^n$$

no qual todo ponto p possui uma vizinhança aberta U dotada de uma parametrização de classe C^k e dimensão m .

Uma aplicação $f : M \rightarrow P$ entre variedade diferenciáveis de classe C^r diz-se diferenciável de classe C^s , $s \leq r$, se para cada ponto $x \in M$ existem cartas

$$\psi : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow W_2 \text{ de } P$$

$$\varphi : U_1 \subset \mathbb{R}^p \rightarrow W_1 \text{ de } M$$

tais que

$$x \in W_1, \quad f(W_1) \subset W_2$$

e a expressão coordenada de f nestas cartas, dada por

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \rightarrow U_2$$

for de classe C^s .

Uma variedade M com bordo ∂M define-se tomando cartas com valores em abertos

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 \geq 0\}.$$

O bordo ∂M fica caracterizado pelos pontos de M com a imagem por alguma carta que está contida em

$$\mathbb{R}_0^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 = 0\}$$

∂M admite uma estrutura de variedade de dimensão $n = 1$.

Definição 20. Um subconjunto S de uma variedade M é uma subvariedade de M com dimensão l (ou codimensão $n - l$) se para todo $x \in S$ existir uma carta

$$\varphi : W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

tal que $x \in W$ e $\varphi(W \cap S)$ seja aberto em um subespaço afim bidimensional de \mathbb{R}^n .

Uma subvariedade S tem uma estrutura diferenciável induzida, cujas as cartas são

$$\widehat{\varphi} : \widehat{W} \rightarrow \widehat{U}$$

onde

$$\widehat{W} = W \cap S \text{ e } \widehat{U} = U \cap \mathbb{R}^l = \varphi(\widehat{W}).$$

Definição 21 (Fibrado Tangente). Seja M^n uma variedade diferenciável e seja

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}.$$

Vamos munir o conjunto TM de uma estrutura diferenciável (de dimensão $2n$), com tal estrutura o conjunto TM será chamado fibrado tangente de M .

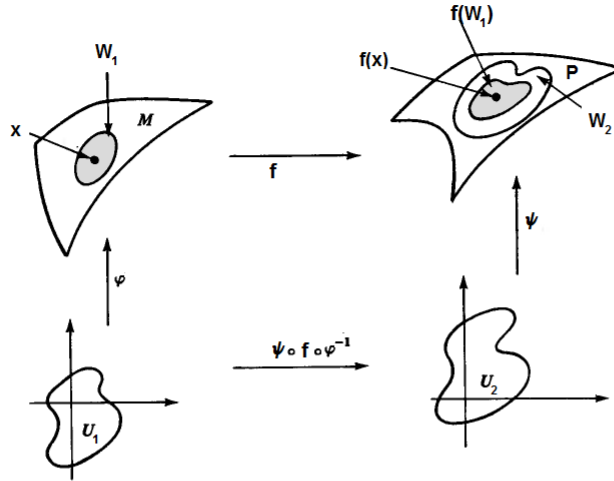


Figura 4.2: [2], pag.6, 1992

4.6 Orientação de Superfícies

Definição 22. Uma superfície m -dimensional M^m é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in M^m$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de M^m , e M^m , neste caso, diz-se orientada.

Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se M^m é orientada, uma parametrização (local) φ é compatível com a orientação de M^m se, juntando φ à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo a mesma) orientação de M^m .

Diremos que um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é normal à superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $p \in M^m$ quando u for perpendicular a todos os vetores tangentes a M^m no ponto p , isto é, quando se tiver $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in T_p M^m$. O conjunto dos vetores normais a M^m no ponto p é um subespaço vetorial de dimensão $n - m$ (igual a codimensão de M^m) do espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Indicaremos este subespaço vetorial com $(T_p M^m)^\perp$. Em cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$, o espaço \mathbb{R}^n se decompõe na soma direta $\mathbb{R}^n = T_p M^m \oplus (T_p M^m)^\perp$.

Definição 23 (Campo diferenciável de vetores normais). Seja um aberto $U \subset M^m$. Uma aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que associa a cada $q \in U$ um vetor normal unitário $N(q) \in \mathbb{R}^n$ a M^m em q , é chamado campo diferenciável de vetores normais.

Exemplo 4. Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de classe C^k . Dada uma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U$, de classe C^k , define-se em U um campo v de vetores normais de classe C^{k-1} , pondo-se, para cada $p = \varphi(x) \in U$,

$$v(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}(x)$$

Como em cada ponto $p = \varphi(x) \in U$ os vetores tangentes $\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}(x)$ são linearmente independentes, vemos que $v \neq 0$ para todo $p \in U$. Além disso, como $T_p M^m$ tem dimensão 1, se tomarmos outra parametrização $\psi : V_0 \rightarrow V$, e definirmos $w : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$w(p) = \frac{\partial \psi}{\partial x^1}(y) \times \dots \times \frac{\partial \psi}{\partial x^n}(y)$$

, onde $p = \psi(y)$, teremos $w(p) = a(p) \cdot v(p)$ com $a \neq 0$, para todo $p \in U \cap V$. Onde $a(p)$ é o determinante da matriz de passagem da base

$$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(x) \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}(x) \right\} \text{ para a base } \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x^1}(y), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}(y) \right\}, \text{ onde } p = \varphi(x) = \psi(y).$$

Ora, esta é a matriz jacobiana do difeomorfismo $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \varphi^{-1}(U \cap V)$. Com efeito, escrevendo $\xi = \varphi^{-1} \circ \psi$, a matriz jacobiana (α_j^i) de ξ no ponto y é caracterizada por $\xi'(y) \cdot e_j = \sum_i \alpha_j^i e^i$. Como $\psi = \varphi \circ \xi$, temos

$$\psi'(y) \cdot e_j = \varphi'(x) \cdot \xi'(y) \cdot e_j = \varphi'(x) \cdot \sum_i \alpha_j^i \varphi'(x) \cdot e_i$$

Daí verifica-se que a matriz de passagem dos $\varphi'(x) \cdot e_i$ para os $\psi'(y) \cdot e_j$ é a matriz jacobiana de ξ no ponto y .

4.7 Espaço de k -jatos de ordem n

Definição 24. Um k -jato z é uma classe de equivalência segundo a relação que identifica duas aplicações diferenciáveis $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ que levam $0 \in \mathbb{R}^n$ em $0 \in \mathbb{R}^p$ e que satisfaz

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{|x|^k} \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0$$

Se f é uma aplicação diferenciável, o k -jato z que a contém será denotado por $j^k f(0)$.

Observação 11. 1. $\mathbb{J}^k(n, p)$ denotará o espaço dos k -jatos de ordem n .

2. f e g possuem o mesmo polinômio de Taylor de ordem k .

Como cada k -jato têm um representante polinomial de grau k (polinômio de Taylor $T_k f$ em $0 \in \mathbb{R}$ de um representante f), o espaço $\mathbb{J}^k(n, p)$ é identificado com o espaço das aplicações polinomiais de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p , com termo constante nulo. Além disso, podemos identificar $\mathbb{J}^k(n, p)$ com \mathbb{R}^l , onde $l = \dim(\mathbb{J}^k(n, p))$.

Exemplo 5. $\mathbb{J}^1(n, p) \simeq \mathbb{L}(n, p)$ o espaço das transformações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^p , já que $\dim \mathbb{J}^1(n, p) = n \cdot p = \dim \mathbb{L}(n, p)$.

Exemplo 6. Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o k -jato de f em a é

$$j^k f(a) = f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$$

Definição 25. A uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ associamos a aplicação

$$j^k f : U \rightarrow \mathbb{J}^k(n, p)$$

$$j^k f(x) = j^k f_x(0)$$

onde f_x é dada por:

$$f_x(u) = f(x+u) - f(x).$$

Esta aplicação é dita extensão de f ao espaço de k -jatos.

Lembramos que uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow P$ é transversal a uma subvariedade L de P se para todo $a \in M$, $b = f(a) \in L$ implicar em

$$Df_a(T_aM) + T_bL = T_bP,$$

onde T_xL indica o espaço tangente a L no ponto x .

Denotaremos por $\tau_k(L)$ o subconjunto de $C^\infty(U; \mathbb{R}^p)$ constituído pelas aplicações diferenciáveis f tais que $j^k f$ é transversal a L , onde L é uma subvariedade de $\mathbb{J}^k(n, p)$. A ferramenta básica para o estudo de genericidade é o seguinte teorema.

Teorema 7 (Thom). $\tau_k(L)$ é um subconjunto residual em $C^\infty(U; \mathbb{R}^p)$ munido da topologia C^∞ de Whitney. Em particular é denso.

4.8 Variedade de Jatos

Sejam M e P variedades diferenciáveis de classe C^∞ com dimensão n e p , respectivamente.

Sejam

$$f, g : M \longrightarrow P$$

aplicações diferenciáveis de classe C^∞ , com $f(x) = g(x)$, para algum x .

Diz-se que f e g têm contato de primeira ordem em x se

$$Df_x = Dg_x.$$

Diz-se que f e g têm contato de ordem k em x se

$$Df, Dg : TM \longrightarrow TP$$

têm contato de ordem $k-1$ em v , para todo $v \in T_xM$ ou simplesmente " $f \sim g$ em x ".

As classes de equivalência assim definidas, no conjunto das aplicações diferenciáveis que aplicam x em y , chamam-se k -jatos com fonte x e meta y .

O conjunto dessas classes de equivalência é dado por $\mathbb{J}^k(M, P)_{x,y}$. Assim, toda aplicação diferenciável que aplica x em y , determina uma classe de equivalência, denominada k -jato de f em x e é denotada por $j^k f(x)$.

Seja

$$\mathbb{J}^k(M, P) = \bigcup_{x,y \in M \times P} \mathbb{J}^k(M, P)_{x,y}$$

o conjunto dos k -jatos de aplicações diferenciáveis entre M e P .

Este conjunto admite uma estrutura de variedade diferenciável de classe C^∞ na qual as aplicações α e β que associam a cada k -jato sua fonte e meta diferenciáveis. Ou seja,

$$(\alpha, \beta) : \mathbb{J}^k(M, P) \longrightarrow M \times P$$

é uma aplicação diferenciável. Além disso para toda aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow P$, temos que

$$j^k f : M \longrightarrow \mathbb{J}^k(M, P)$$

é diferenciável.

Como variedade diferenciável $\mathbb{J}^k(M, P)$ terá dimensão

$$\dim(\mathbb{J}^k(M, P)) = \dim M + \dim P + \dim \mathbb{J}^k(n, p)$$

onde $\mathbb{J}^k(n, p)$ é o espaço $\mathbb{J}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)_{(0,0)}$.

Teorema 8. *Sejam M e P variedades diferenciáveis de classe C^∞ e dimensões n e p respectivamente. Então:*

1. $\mathbb{J}^k(M, P)$ é uma variedade diferenciável de classe C^∞ , com dimensão igual a $n + p + \dim \mathbb{J}^k(n, p)$.
2. As aplicações $\alpha : \mathbb{J}^k(M, P) \rightarrow M$ e $\beta : \mathbb{J}^k(M, P) \rightarrow P$ são submersões.
3. Se $h : P \rightarrow Z$ for de classe C^∞ , $h_* : \mathbb{J}^k(M, P) \rightarrow \mathbb{J}^k(M, Z)$ também será de classe C^∞ . Se g for um difeomorfismo $g^* : \mathbb{J}^k(P, Z) \rightarrow \mathbb{J}^k(M, Z)$ também será um difeomorfismo.
4. Se $g : M \rightarrow P$ for uma aplicação diferenciável de classe C^∞ , o mesmo ocorrerá com $j^k g : M \rightarrow \mathbb{J}^k(M, P)$.

Demonstração. Ver [25]

□

4.9 Topologia de Whitney

Sejam M e P variedades diferenciáveis de classe C^∞ e denotemos por $C^\infty(M, P)$ o espaço das aplicações diferenciáveis de classe C^∞ de M em P . Neste espaço introduziremos a topologia C^∞ de Whitney ou topologia fina definida pela seguinte base de abertos:

$$M(k, U) = \{f \in C^\infty(M, P); j^k f(M) \subset U, k \geq 0\}$$

onde $j^k f(M)$ é um aberto de $\mathbb{J}^k(M, P)$.

Assim os subconjuntos abertos de $C^\infty(M, P)$ serão as reuniões arbitrárias de conjuntos da forma

$$M(k_1, U_1) \cap M(k_2, U_2) \cap \cdots \cap M(k_l, U_l)$$

4.10 Funções de Morse

Toda função diferenciável $f_0 : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U aberto do \mathbb{R}^n , pode ser aproximada por uma função diferenciável f , chamada **função de Morse**, cujo conjunto singular é formado por pontos isolados em cada um dos quais a função f é diferenciavelmente equivalente a uma das seguintes formas quadráticas:

$$g_\lambda(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2, \quad 0 \leq \lambda \leq n,$$

o número λ é chamado de **índice do ponto singular**.

Toda função de Morse f apresenta a seguinte propriedade de estabilidade local:

Se g é próxima de f , juntamente com suas derivadas até segunda ordem, existe uma bijeção entre $S(f)$ e $S(g)$, de modo que os pontos correspondentes tem o mesmo índice e portanto f e g são localmente equivalentes nestes pontos.

Se f for própria e $f|_{S(f)}$ biunívoca, então f é diferenciavelmente estável (globalmente).

4.11 Aplicações de Whitney do plano no plano

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ , com U aberto em \mathbb{R}^n . Sabemos que a derivada de f no ponto a , Df_a , é dada pela matriz jacobiana de f no ponto $a \in U$:

$$Df_a \cong \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n$$

Definição 26 (Ponto Regular). *Um ponto $a \in U$ onde o posto de Df_a é máximo, ou seja,*

$$\dim(Df_a(\mathbb{R}^n)) = \min\{n, p\}$$

é dito um ponto regular de f .

Definição 27 (Pontos Singulares). *Se o posto de Df_a for menor que o $\min\{n, p\}$ diremos que a é um ponto singular de f .*

Observação 12. 1. *Denotamos por $S(f)$ o conjunto dos pontos singulares.*

2. *$S(f)$ é um subconjunto fechado no domínio de f .*

Estudaremos aplicações de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 que apresentam tipos distintos de singularidades. Escolha dois sistemas de coordenadas (x, y) e (u, v) em \mathbb{R}^2 de classe C^r .

Seja uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com U aberto em \mathbb{R}^2 que possui um ponto regular $p \in U$, ou seja, nesse ponto Jacobiano é não-nulo. Então pelo Teorema da Função Inversa, temos uma vizinhança V de p e um homeomorfismo

$$h : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(V) \subset \mathbb{R}^2,$$

assim a imagem inversa de cada ponto $q \in f(U)$ intercepta V em um único ponto.

Considere a seguinte aplicação

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = y \end{cases}.$$

O jacobiano dessa aplicação é dado por

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x. \end{aligned}$$

O jacobiano se anula em $x = 0$, dessa forma os pontos singulares de f estão sobre o eixo y . Sejam as vizinhanças U de $(0, 0)$ e V de $f(0, 0)$ tal que $q \in V$ no semi-plano $u > 0$, teremos $f^{-1}(q_1) = \{p_1, p_2\}$ em U , onde p_1 e p_2 são simétricos. Quanto ao semiplano $u < 0$, dado $q_1 \in V$, teremos $f^{-1}(q_1) = \emptyset$ em U . Portanto, f^{-1} **dobra** o plano (x, y) em relação ao eixo x .

Analisemos a seguinte aplicação

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

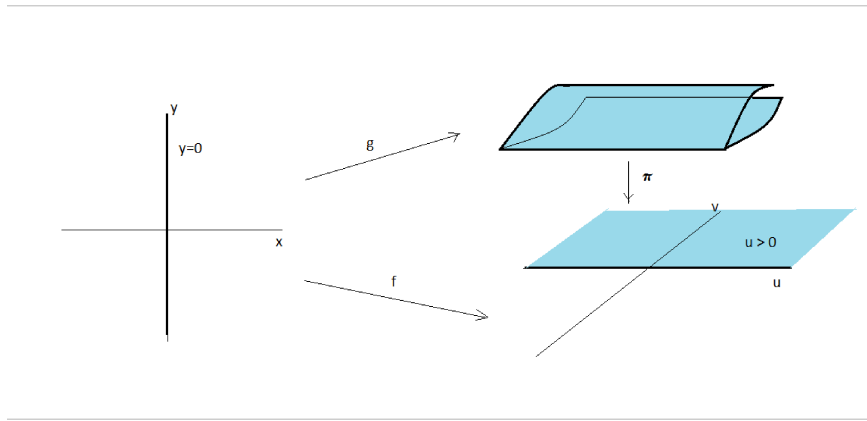


Figura 4.3: Pontos de dobra

dada por:

$$\begin{cases} u = xy - x^3 \\ v = y \end{cases}.$$

O jacobiano dessa aplicação é dado por:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y - 3x^2 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y - 3x^2. \end{aligned}$$

O jacobiano se anula em $y - 3x^2 = 0$, dessa forma os pontos singulares de f estão sobre a parábola $y = 3x^2$. A imagem por f desta curva é dada por

$$27u^2 = 4v^3$$

a qual apresenta uma **cúspide** na origem. Note que dado $q \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $27u^2 - 4v^3 > 0$, temos $f^{-1}(q) = \{p_1, p_2, p_3\}$, com p_1 , p_2 e p_3 distintos.

Se $q_1 \in \mathbb{R}^2$ satisfaz $27u^2 - 4v^3 < 0$, temos $f^{-1}(q_1) = p$, onde p é único.

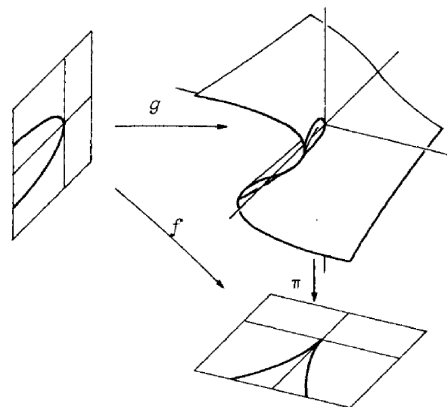


Figura 4.4: Pontos cuspidais de Whitney

Seja $g = f|_{S(f)}$, onde $S(f)$ é o conjunto dos pontos singulares.

Nos pontos regulares de g , denominados pontos de dobra, f é diferenciavelmente equivalente a

$$g_2(x, y) = (x, y^2) \text{ em } 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Se α é um ponto cuspidal de f , então $f(\alpha)$ é diferenciavelmente equivalente a

$$g_1(x, y) = (x, xy - x^3) \text{ em } 0 \in \mathbb{R}^2$$

4.12 Transversalidade

Seja $f : M \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ , onde M e P são variedades diferenciáveis de dimensão n e p respectivamente. Se

$$Df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} P$$

não for sobrejetiva, diremos que x é um ponto crítico de f . Denotaremos por Σ_f o conjunto dos pontos críticos de f . Os elementos de $P - f(\Sigma_f)$ serão ditos valores regulares.

$$\Sigma_f = \begin{cases} S(f), & \text{se } p \geq n \\ M, & \text{se } n < p \end{cases}$$

Definição 28 (Conjunto Residual). *Um subconjunto de um espaço topológico é residual quando pode ser expresso como interseção de uma família enumerável de abertos densos.*

Observação 13. *Nem todo conjunto residual é denso.*

Definição 29 (Espaço de Baire). *Um espaço topológico é dito de Baire se todos os seus subconjuntos residuais forem densos.*

Observação 14. *Variedades diferenciáveis são espaços de Baire. Ver [26].*

Definição 30. *Sejam M e P variedades diferenciáveis de classe C^∞ e $Z \subset P$ uma subvariedade. Seja $Z' \subset Z$ e $f : M \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ . Dizemos que f é transversal a Z sobre Z' em $x \in M$ se uma das condições seguintes for satisfeita:*

1. $f(x) \notin Z'$
2. $f(x) \in Z'$ e $Df_x(T_x M) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} P$.

Seja K um subconjunto de M . Dizemos que f é transversal a Z' em K se, para todo $x \in M$, f for transversal a Z sobre Z' em x .

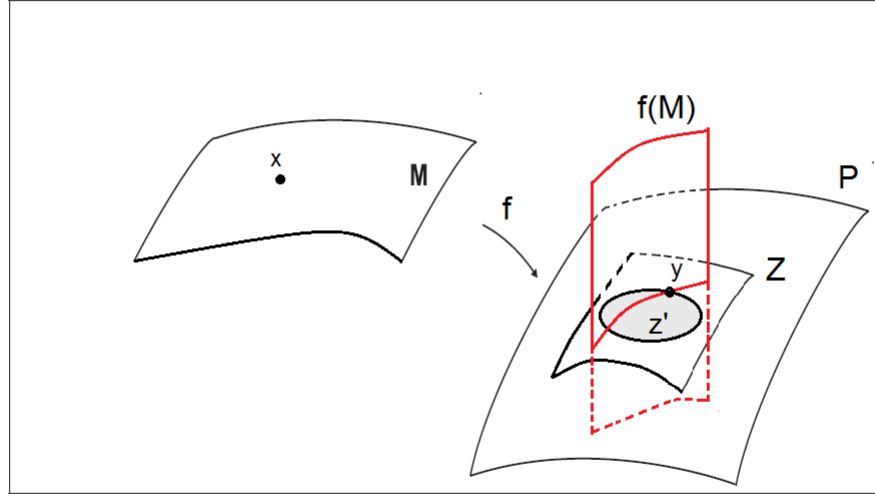
Se $Z = Z'$ e $K = M$, diz-se simplesmente que f é transversal a Z .

Teorema 9 (Teorema Elementar da Transversalidade). *Sejam M e P variedades diferenciáveis de classe C^∞ e Z subvariedade de P . Nestas condições o conjunto*

$$\tau = \{f \in C^\infty(M, P) : f \text{ transversal a } Z\}$$

onde $f \text{ transversal a } Z$ quer dizer f transversal a Z . Então τ_Z é residual em $C^\infty(M, P)$. Se Z for fechado este conjunto será aberto.

Demonstração. Ver [25]. □



Seja

$$M_r = \{(x_1, \dots, x_r) \in M^r; x_i \neq x_j, \text{ se } i \neq j\}.$$

A variedade $\mathbb{J}_r^k(M, P)$ de r -multijatos de ordem k será definida como

$$\mathbb{J}_r^k(M, P) = (\alpha^r)^{-1}(M_r),$$

isto é, o espaço formado pelas r -uplas de k -jatos com fontes distintas duas a duas.

Dada $f \in C^\infty(M, P)$ definimos a extensão de f ao espaço de r -multijatos de ordem

$$j_r^k f : M_r \longrightarrow \mathbb{J}_r^k(M, P)$$

por

$$j_r^k f(x_1, \dots, x_r) = (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_r))$$

Teorema 10 (Thom-Mather). *Seja Z uma subvariedade diferenciável de classe C^∞ em $\mathbb{J}_r^k(M, P)$, $Z' \subset Z$ subconjunto fechado em $\mathbb{J}_r^k(M, P)^r$, K subconjunto de M_r fechado em M^r . Então*

$$\tau_{K, Z'} = \{f \in C^\infty(M, P); \mathbb{J}_r^k f \simeq Z \text{ sobre } Z' \text{ em } K\}$$

é aberto e denso em $C^\infty(M, P)$.

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema 11. *Seja Z_i uma família enumerável de subvariedades em $\mathbb{J}_r^k(M, P)$. O conjunto*

$$\tau = \{f \in C^\infty(M, P); \mathbb{J}_r^k f \simeq Z_i, \text{ } i \in \mathbb{N}\}$$

é residual em $C^\infty(M, P)$.

Demonstração. Ver [25]. □

Referências Bibliográficas

- [1] (CAMACHO, César/LINS NETO, Alcides - Teoria Geométrica das Folheações, IMPA , Rio de Janeiro - 1979)
- [2] (CARMO,Manfredo P. do - Riemannian Geometry, Translated by F.Flaherty , Birkhause Boston, Boston - 1992)
- [3] (CARMO,Manfredo P. do - Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, SBM , Rio de Janeiro - 2005)
- [4] (GARCIA, Ronaldo/SOTOMAYOR,Jorge/SPINDOLA,Flausino L. - Axiumbilic Singular on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 and their Generic Bifurcations,Journal of Singularities,124-146, vol.10, 2014)
- [5] (GARCIA, Ronaldo/SOTOMAYOR,Jorge - Lines of Axial Curvature on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 , Diff. Geom. and its Applications,12 (2000),253-269)
- [6] (GARCIA,Ronaldo - Linhas de Curvatura de Hipersuperfícies Imersas no Espaço \mathbb{R}^4 , Tese de Doutorado,IMPA, Rio de Janeiro-1989)
- [7] (GARCIA, Ronaldo/SOTOMAYOR,Jorge - Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA , Rio de Janeiro - 2009)
- [8] (GARCIA,Ronaldo./SOTOMAYOR,Jorge - Lines of Curvature on Surfaces, Historical Comments and Recent Developments,São Paulo Journal of Mathematical Sciences, 2 (2008), 99-143)
- [9] (GUTIERREZ,C./GUADALUPE,I./TRIBUZY,R./GUÍÑES,V. - A Differential Equation for Lines of Curvature Immersed in \mathbb{R}^4 , Cadernos de Matemática,2 (2001),189-200)
- [10] (GUTIERREZ,C./GUADALUPE,I./TRIBUZY,R./GUÍÑES,V. - Lines of Curvature Immersed in \mathbb{R}^4 , Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 48, 2 (1997),233-251)
- [11] (GUTIERREZ, Carlos/SOTOMAYOR,Jorge - Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA , Rio de Janeiro - 1991)
- [12] (HUGHES,Bruce - Neighborhoods of Strata in Manifold Stratified Spaces, Glasgow Math, 46 (2004))
- [13] (JANSON,Svante - Resultant and Discriminant of Polynomials, Uppsala University, Uppsala - Sweden)
- [14] (LIMA,Elon Lages - Variedades Diferenciáveis, IMPA , Rio de Janeiro - 2010)
- [15] (LIMA,Elon Lages - Álgebra Linear, IMPA , Rio de Janeiro)
- [16] (LIMA,Elon Lages - Curso de Análise, IMPA ,vol. 2, Rio de Janeiro - 2005)
- [17] (LOIBEL, Gilberto Francisco - Singularidades das Aplicações Diferenciáveis, 6º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas - 1967)

- [18] (LOPES, Debora - Coordenadas Isotérmicas, IMPA, Rio de Janeiro-2009)
- [19] (LOPES, Debora - Pontos parcialmente umbílicos em famílias a um parâmetro de hipersuperfícies em \mathbb{R}^4 , Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo - 2012)
- [20] (MELLO, L.F. - Mean Directionally Curved Lines on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 , Publ. Mat. 47 (2003), 415-444)
- [21] (PISKOUNOV, N. - Calcul Différentiel et Intégral, MIR - 1966)
- [22] (REMIZOV, A.O. - Multidimensional Poincaré Construction and Singularities of Lifted Fields for Implicit Differential Equations, Journal of Mathematical Sciences, vol. 151, 6 (2008))
- [23] (SPINDOLA, Flausino L. - Bifurcação de Pontos Axiumbílicos e Ciclos Axiais de Superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , Tese de Doutorado, IME-USP, São Paulo - 2015)
- [24] (SOTOMAYOR, Jorge - Lições de Equações Diferenciais, IMPA, Rio de Janeiro - 1979)
- [25] (SOTOMAYOR, Jorge - Singularidades de Aplicações Diferenciáveis, III Escola Latino Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro - 1976)
- [26] (SOTOMAYOR, Jorge - Historical Comments on Monge's Ellipsoid and the Configuration of Lines of Curvature on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 , arXiv:math (2004))
- [27] (SOUZA, Sebastião Alves - Curvas Integrais de Campos de Direções sobre Superfícies em \mathbb{R}^4 , Tese de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, MG - 2008)